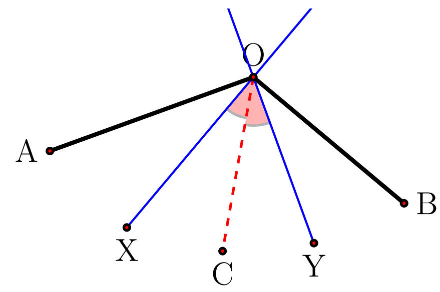
等角共轭点 (Isogonal Conjugate Point)

1.等角线

给定一个角，若过这个角之顶点的两条直线，与这个角的角平分线对称，则称这两条线为关于这个角的等角线(Isogonal Line)，这两条线关于这个角是等角(isogonal)或等角共轭(isogonal conjugate)的。



如图，OC 平分$\angle AOB$，若$\angle XOC = \angle COY$，则OX、OY 为关于$\angle AOB$ 的等角线。

等角线的一些性质

性质(1) 对应于一个角，有无限多对等角线

性质(2) 如上图，$\angle AOX = \angle BOY$

性质(3) OA、OB 关于$\angle AOB$ 互为等角

性质(4) 关于一个角，角平分线与其自身，是重合的等角线，亦称为自等角线

性质(5) 关于一个角，其两个邻补角的两条平分线，是一对等角线，因为这两条角平分线重合，是自等角线

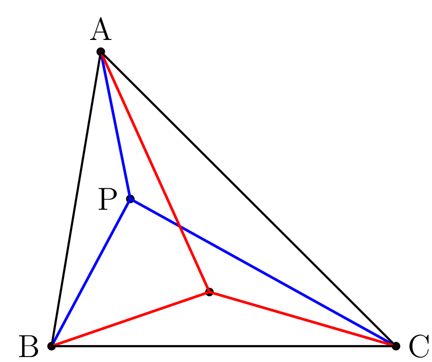
性质(6) AP、AQ 为关于$\angle BAC$ 的等角线，当且仅当P 到$\angle A$ 两边的一对距离与Q 到$\angle A$ 两边的一对距离成反比例

性质(7) 由三角形内的一点到各顶点之联线关于该角的等角线共点

性质(8) 由三角形外接圆上的一点到各顶点之联线关于该角的等角线互相平行

2.等角共轭点

若P 为$\triangle ABC$ 内的一点，AP、BP、CP 各自关于$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的等角线三线共点，这一点与P 为关于$\triangle ABC$ 的等角共轭点(isogonal conjugate point)



若一点的等角共轭点与自身重合，则称这一点为自等角共轭点。

等角共轭点的一些性质

性质(9) 由一点到三角形各顶点之联线关于该角的等角线皆有等角共轭点

性质(10) 三角形的外心与垂心等角共轭

性质(11) 三角形的内心、旁心皆为自等角共轭点

性质(12) 三角形的第一布洛卡点Ω、第二布洛卡点Ω' 为等角共轭点

性质(9)的证明

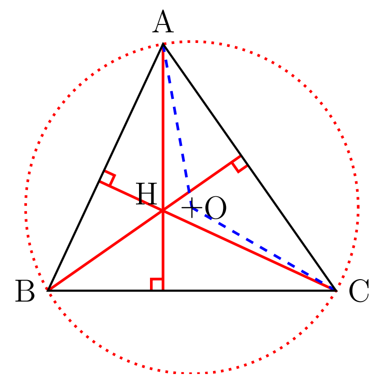
由一点到三角形各顶点之联线关于该角的等角线皆有等角共轭点

1. 因三条由三角形外接圆上的一点到各顶点之联线关于该角的等角线互相平行，假令这三条平行线共点于无限远的一点，将无限远的一点视为等角共轭点，所以三角形外接圆上的任一点皆有等角共轭点；
2. 由性质(7)，三角形内的一点到各顶点之联线关于该角的等角线共点
3. 同理，可以证明三角形外的一点到各顶点之联线关于该角的等角线共点

性质(10)的证明

三角形的外心与垂心等角共轭

证明：



1. 命$\triangle ABC$ 的外心、垂心为O、H；
2. $\angle BAH = 90^\circ - \angle ABC$；
3. $\angle AOC = 2\angle ABC$，$\angle OAC = \dfrac{1}{2}(180^\circ - \angle AOC)$
$= \dfrac{1}{2}(180^\circ - 2\angle ABC) = 90^\circ - \angle ABC$；
4. $\angle BAH = \angle OAC$，AH、AO 关于$\angle BAC$ 等角；
5. 同理，BH、BO 关于$\angle ABC$ 等角，CH、CO 关于$\angle ACB$ 等角；
6. 三角形的外心与垂心等角共轭 ■

性质(11)的证明

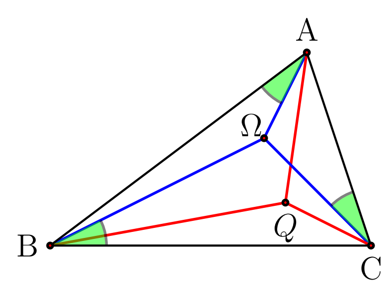
三角形的内心、旁心皆为自等角共轭点

1. 由性质(4)、性质(5)，关于一个角，角平分线与其邻补角的角平分线，皆为自等角线；
2. 三角形的内心为三条角平分线的交点，所以内心与其等角共轭点重合，是自等角共轭点；
3. 三角形的旁心是一个角与其余两角的邻补角之角平分线的交点，所以旁心与其等角共轭点重合，是自等角共轭点。

性质(12)的证明

三角形的第一布洛卡点Ω、第二布洛卡点Ω' 为等角共轭点

证明：



1. 如图，Ω 为$\triangle ABC$ 的第一布洛卡点；
$\angle \Omega AB = \angle \Omega BC = \angle \Omega CA = \omega$
2. 命Q 为Ω 的等角共轭点，$\angle QBA = \angle QCB = \angle QAC = \omega$；
3. Q 即为$\triangle ABC$ 的第二布洛卡点Ω'。 ■

参考资料

1. R.Honsberger著、赵勇译.十九和二十世纪欧氏几何学中的片段.哈尔滨工业大学出版社,2017.(P.50)
2. R.Johnson 著、单樽译.近代欧氏几何学.哈尔滨工业大学出版社,2012.(P.147)
3. A.C.M.Neto. An Excursion Through Elementary Mathematics Volume II - Euclidean Geometry. Springer,2018(
4. 谷超豪.数学词典.上海辞书出版社,1992.(P.134)
5. 等角线.(http://mathsgreat.com/FoodCourt/FoodCourt_4_007.pdf)
6. 布洛卡点.(http://mathsgreat.com/FoodCourt/FoodCourt_1_002.pdf)