怎样进行数学竞赛题的探究

由中国教育学会中学数学专业委员会组织命题的"1999 年全国初中竞赛",其中第 14 题是:如图 1,已知四边形 $ABCD$ 内接于直径为 3 的圆 O,对角线 AC 是直径,AC 和 BD 的交点是 P,$AB = BD$,且 $PC = 0.6$,求四边形 $ABCD$ 的周长.

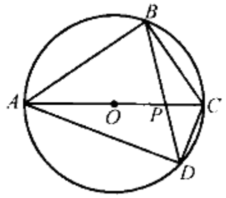

图 1

1 解法探究

解法 1 如图 2,过点 B 作 $BH \perp AD$ 于 H,因为 $AB = BD$,所以 $\angle 1 = \angle 2$,$AH = DH$,BH 经过圆心 O,所以

$$\frac{AB}{PB} = \frac{AO}{OP}$$

即

$$PB = \frac{3}{5}AB, PD = \frac{2}{5}AB \quad ①$$

因为 $\odot O$ 的弦 AC,BD 相交于 P,所以

$$PA \cdot PC = PB \cdot PD \quad ②$$

由 ①,② 解得 $AB = \sqrt{6}$.

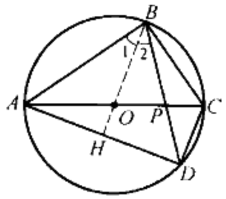

图 2

因为 AC 为 $\odot O$ 的直径

$$\angle BAD = \angle BDA = \angle BCA$$

所以

$$Rt\triangle ABC \backsim Rt\triangle BHA$$

所以

$$\frac{AB}{BH} = \frac{AC}{AB} = \frac{BC}{AH}$$

即

$$BH = 2, AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{2}, AD = 2\sqrt{2}, BC = \sqrt{3}$$

所以

$$CD = 2OH = 2(2 - 1.5) = 1$$

所以四边形 $ABCD$ 的周长为 $1 + \sqrt{3} + \sqrt{6} + 2\sqrt{2}$.

解法 2 如图 3,联结 OD,则 $\angle 1 = \angle 2$.因为 $AB = BD$,所以 $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$,所以 $\angle 3 = \angle 4 = \angle 5$,所以$\frac{CD}{OD} = \frac{PC}{OP}$,即 $CD = 1$.因为

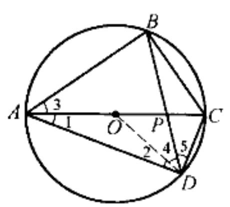

图 3

$$\triangle PAB \backsim \triangle PDC$$

所以

$$\frac{AB}{CD} = \frac{PA}{PD} = \frac{PB}{PC}$$

即

$$PB = \frac{3}{5}AB, PD = \frac{12}{5AB}$$

但

$$PD + PB = AB$$

所以 $AB = \sqrt{6}$,因为 AC 为直径,所以

$$BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{3}, AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=2\sqrt{2}$$

以下略.

解法 3 如图 4,联结 BO 并延长交 AD 于 H,交 $\odot O$ 于 F,连 AF.

因为 $AB=BD$,AC 为直径,所以 $AH=DH$,$BH\perp AD$,$CD\perp AD$,所以 $BH/\!/CD$,所以 $\frac{OB}{CD}=\frac{OP}{PC}$,即 $CD=1$.因为

$$OH=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}$$

所以

$$BH=2, HF=1$$

因为

$$\angle BAF=\angle AHB=\angle AHF=90^\circ$$

所以

$$AH=\sqrt{BH\cdot HF}=\sqrt{2}$$

所以

$$AD=2\sqrt{2}$$

$$AB=\sqrt{BH\cdot BF}=\sqrt{6}$$

$$AF=\sqrt{HF\cdot BF}=\sqrt{3}$$

而 $\angle ABF=\angle BAC$,所以 $BC=AF=\sqrt{3}$.以下略.

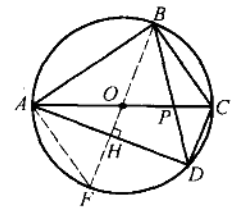

图 4

解法 4 如图 5,过 C 作 $EF/\!/BD$,分别交 AB,AD 的延长线于 E,F,则 $\frac{AB}{BE}=\frac{AP}{PC}=\frac{4}{1}$,即

$$BE=\frac{1}{4}AB$$

因为

$$\angle 1=\angle 2=\angle 3$$

AC 为直径,所以

$$\mathrm{Rt}\triangle CBE\backsim\mathrm{Rt}\triangle ADC$$

所以

$$\frac{BE}{CD}=\frac{BC}{AD}$$

即

$$AB=\frac{4CD\cdot BC}{AD}$$

在圆内接四边形 $ABCD$ 中,由托勒密定理得

$$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$$

因为 $AB=BD$,所以

$$AD\cdot BC=\frac{4CD\cdot BC}{AD}(3-CD)$$

即

$$AD^2=12CD-4CD^2$$

而

$$AD^2=9-CD^2$$

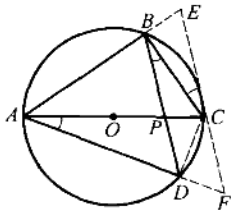

图 5

所以

$$CD^2-4CD+3=0$$

所以 $CD=1$ 或 $CD=3$(不合题意,舍去),以下略.

解法5 如图6,分别延长 AB,DC 相交于 G,过 B 作 $BF\parallel AC$ 交 DG 于 F,则 $\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$,所以

$$\mathrm{Rt}\triangle ABC\backsim \mathrm{Rt}\triangle GBC$$

即

$$AB=BG,AC=CG=3$$

所以

$$BF=\frac{1}{2}AC=\frac{3}{2},\frac{PC}{BF}=\frac{PD}{BD}$$

即

$$PD=\frac{2}{5}AB,PB=\frac{3}{5}\cdot AB$$

因为 AC,BD 为 $\odot O$ 的弦,GA,GD 为 $\odot O$ 的割线,所以

$$PD\cdot PB=PA\cdot PC,GA\cdot GB=GD\cdot GC$$

即 $AB=\sqrt{6}$,$CD=1$,以下略.

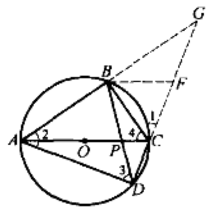

图6

解法6 如图7,联结 BO 并延长交 AD 于 H,则 $BH\perp AD$.过 B 作等腰 $\triangle ABD$ 的外角 $\angle DBE$ 的平分线 BL 交 AC 的延长线于 L,则 $BL\parallel AD$,所以 $BL\perp BH$,即 BL 为 $\odot O$ 的切线,所以 $BL^2=CL\cdot AL$,因为 BO 平分 $\angle ABP$,BL 平分 $\angle DBE$,所以

$$\frac{AB}{BP}=\frac{AO}{OP}=\frac{AL}{PL}$$

即 $PL=3.6$,$CL=3$,$BL=3\sqrt{2}$.因为

$$\angle 1=\angle 2=\angle 3,\angle 4=\angle 5=\angle 6$$

所以

$$\triangle BCD\backsim\triangle LCB,\triangle APD\backsim\triangle LPB$$

所以

$$\frac{CD}{BC}=\frac{BC}{CL}=\frac{BD}{BL},\frac{AD}{BL}=\frac{PA}{PL}$$

即

$$BC^2=3CD,AB=\sqrt{2}BC$$

$$AD=2\sqrt{2}$$

因为

$$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$$

所以 $CD=1$,$BC=\sqrt{3}$,$AB=\sqrt{6}$,以下略.

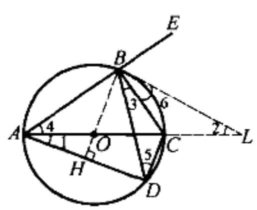

图7

解法7 如图8,过 A 作 $AG\parallel BC$ 交 CD 的延长线于 G,交 $\odot O$ 于 Q,连 CQ,BG 相交于 H,连 BQ,并过 Q 作 $QF\perp CG$ 于 F.因为 AC 为 $\odot O$ 的直径,所以

$$\angle ABC=\angle BAQ=\angle AQC=90^\circ$$

所以四边形 $ABCQ$ 为矩形,即 $BC\perp\!\!\!\!=AQ$,$AB\perp\!\!\!\!=CQ$,所以 $\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$,所以

$$\mathrm{Rt}\triangle ACQ\backsim\mathrm{Rt}\triangle GCQ$$

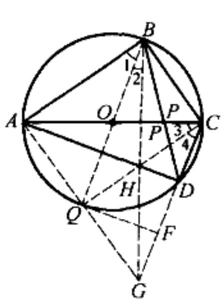

图8

即

$$AQ = GQ = BC, AC = CG = 3$$

所以 $BC \perp\!\!\!\!\perp CQ$,所以四边形 $BCGQ$ 为平行四边形,即 H 为 CQ 的中点,F 为 DG 的中点,D 为 CF 的中点,所以

$$CD = DF = FG = \frac{1}{3}CG = 1$$

以下略.

2 拓宽探究

利用此题的各种解法,可将命题的结论拓宽如下:

(1) 求四边形 $ABCD$ 的面积 $S_{\triangle ABCD}$;

(2) 求 $S_{\triangle PAB} : S_{\triangle PBC} : S_{\triangle PCD} : S_{\triangle PDA}$;

(3) 求 $\sin\angle APB$ 的值;

(4) 求 $\triangle PCD$ 的内切圆的半径.

解 (1) 由解法 3 可知,$CD = 1, AD = 2\sqrt{2}, AB = \sqrt{6}, BC = \sqrt{3}$,所以

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB \cdot BC + AD \cdot CD) = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

(2) 由解法 1 知

$$PB = \frac{3\sqrt{6}}{5}, PD = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

所以

$$\begin{gathered}S_{\triangle PAB} : S_{\triangle PBC} : S_{\triangle PCD} : S_{\triangle PDA} = \\ \frac{1}{2}PA \cdot PB\sin\angle APB : \frac{1}{2}PB \cdot PC\sin\angle BPC : \\ \frac{1}{2}PC \cdot PD\sin\angle CPD : \frac{1}{2}PA \cdot PD\sin\angle APD = \\ PA \cdot PB \cdot \sin\angle APB : PB \cdot PC \cdot \sin\angle APB : PC \cdot PD \cdot \\ \sin\angle APB : PA \cdot PD \cdot \sin\angle APB = 12:3:2:8\end{gathered}$$

(3) 由解法 1 知,$AB = \sqrt{6}, BC = \sqrt{3}, PB = \frac{3}{5}\sqrt{6}$,因为

$$S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2}AB \cdot AP \cdot \sin\angle BAC = \frac{1}{2}AP \cdot PB \cdot \sin\angle APB$$

所以

$$\sin\angle APB = \frac{AB \cdot BC}{AC \cdot PB} = \frac{5}{9}\sqrt{3}$$

(4) 设 $\triangle PCD$ 的内切圆半径为 r,因为

$$\begin{gathered}S_{\triangle PCD} = \frac{1}{2}r(CD + PD + PC) = \\ \frac{1}{2}PC \cdot CD \cdot \sin\angle ACD\end{gathered}$$

所以

$$r = \frac{PC \cdot CD \cdot \frac{AD}{AC}}{CD + PD + PC} = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{5}$$

3 推广

将原题条件进行发散,作出类比推广如下:

心得 体会 拓广 疑问

已知四边形 $ABCD$ 内接于半径为 R 的 $\odot O$，对角线 AC 是直径，AC 和 BD 相交于点 P，$AB = BD$，且 $OP : PC = k$．求

(1) 四边形 $ABCD$ 的周长及 k 的取值范围；

(2) 当 k 取何值时，$\triangle ABD$ 的面积最大？形状如何？此时 S_{ABCD} 为多大？

(3) 当 k 取何值时，$\angle APB$ 最大？

(4) 若 $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle PCD}$，则 P 将 OC 黄金分割．

解 (1) 由图 4 可知，$\frac{R}{CD} = \frac{OP}{PC} = k$，即 $CD = \frac{R}{k}$，所以

$$AD = \frac{R}{k}\sqrt{4k^2 - 1}$$

$$AB = \frac{R}{k}\sqrt{2k^2 + k}$$

$$BC = \frac{R}{k}\sqrt{2k^2 - k}$$

所以四边形 $ABCD$ 的周长为

$$\frac{R}{k}(\sqrt{2k^2 + k} + \sqrt{2k^2 - k} + \sqrt{4k^2 - 1} + 1)$$

因为 $k > 0, 2k^2 + k > 0, 2k^2 - k > 0, 4k^2 - 1 > 0$，所以 $k > \frac{1}{2}$．

(2)
$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}AD \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{k}\sqrt{4k^2 - 1} \cdot \left(R + \frac{R}{2k}\right) = \frac{R^2}{2} \cdot \sqrt{4k^2 - 1} \cdot \frac{2k + 1}{2k^2}$$

令 $k = \frac{1}{2}\sec\theta, \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$，则

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}R^2\tan\theta \cdot \frac{2(\sec\theta + 1)}{\sec^2\theta} = R^2\sin\theta(1 + \cos\theta) = 4R^2\sin\frac{\theta}{2}\cos^3\frac{\theta}{2}$$

因为

$$\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^6\frac{\theta}{2} = \frac{1}{3}\left(3\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^6\frac{\theta}{2}\right) \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{3\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}}{4}\right)^4 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4$$

所以

$$(S_{\triangle ABD})_{\max} = 4R^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$$

等号仅当 $3\sin^2\frac{\theta}{2} = \cos^2\frac{\theta}{2}$，即

$$\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{3}, \tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\theta}{2} = 30^\circ$$

即 $\theta = 60^\circ$ 也就是 $\triangle ABD$ 为等边三角形时成立．

这时 $k = 1$ 且 $S_{ABCD} = \sqrt{3}R^2$．

(3) 因为 $S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2}AB \cdot AP \cdot \sin\angle BAC = \frac{1}{2}AP \cdot PB \cdot \sin\angle APB$，所以

心得 体会 拓广 疑问

$$\sin\angle APB=\frac{AB\cdot BC}{PB\cdot AC}=\frac{k+1}{2k^2}\sqrt{2k^2-k}$$

因为 $\sin\angle APB\leqslant 1$,所以当 $\sin\angle APB=1$,即 $\angle APB=90^\circ$ 时为最大,所以

$$\frac{k+1}{2k^2}\sqrt{2k^2-k}=1$$

$$2k^3-3k^2+1=0$$

$$(k-1)^2(2k+1)=0$$

但 $2k+1\neq 0$,所以 $k=1$.

(4) 因为 $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle PCD}$,所以 $OA\cdot AB=PD\cdot CD$,即

$$\frac{1}{k(k+1)}=1,k^2+k-1=0$$

所以 $k=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,所以 P 将 OC 黄金分割.

4 引申

笔者发现,对原命题可以从不同方面进行发散,并得到如下引申:

1. 如图 9,若四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$,对角线 AC 平分 $\angle BAD$,AC 和 BD 相交于点 P,且 $AB=BD$,$AC=2.4$,$PC=0.6$,求四边形 $ABCD$ 的周长.

(答案:$\frac{12}{5}\sqrt{3}+\frac{12}{5}$,解略)

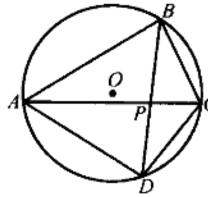

图 9

2. 如图 10,四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$,对角线 AC 平分 BD,AC 和 BD 相交于 P,$AB=BD$,且 $AP=\frac{9}{4}$,$PC=\frac{3}{4}$.求四边形 $ABCD$ 的周长.

(答案:$3\sqrt{3}+3$)

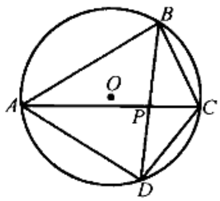

图 10

3. 如图 11,四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$,对角线 AC,BD 相交于 P.

(1) 若 AC 平分 $\angle BAD$,$AP^2=PB\cdot PD$,则 $\cos\angle BAC=\cos^2\angle APD$;

(2) 若 AC 平分 $\angle BAD$,$CD=4$,$PC=2$,线段 BP,DP 为正整数,则 BP,DP 为方程 $x^2-BDx+12=0$ 的两根;

(3) 若 AC 为直径,则 $\frac{AP}{PC}=\tan\angle ABD\cdot\tan\angle ADB$;

(4) 若 $AB=BD$,$BC+CD=AC$,则 $\frac{1}{BC}+\frac{1}{CD}=\frac{1}{PC}$;

(5) 若 AC 平分 $\angle BAD$,且 $\angle BAD=60^\circ$,过 P 作 $PE\perp AB$ 于 E,$PF\perp AD$ 于 F,$S_{\triangle PEF}:S_{\triangle ABD}=k$,当 k 取最大值时,$\triangle ABD$ 为何种三角形.

(答案:k 取 $\frac{3}{16}$ 时,$\triangle ABD$ 等边.证明、解法略)

(6) 当 AC 为直径,$AB=2$,$CD=1$ 时,求 $\sin\angle APB$.

(答案:$\frac{15+6\sqrt{3}}{26}$)

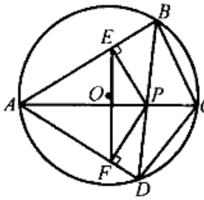

图 11

(吴长明)