为了方便表达，我将题目的数字改一下，改成：

设 $m$ 是给定的正整数，有序数组 $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2m})$ 中 $a_i = 1$ 或 $-1$（$1 \leqslant i \leqslant 2m$）。若对任意的 $1 \leqslant k \leqslant l \leqslant m$, $k, l \in \mathbb{N}^+$，都有

$$\left|\sum_{i=2k-1}^{2l} a_i\right| \leqslant 2$$

成立，求满足“存在 $1 \leqslant k \leqslant m$，使得 $a_{2k-1}/a_{2k} \neq 1$”的有序数组 $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2m})$ 的个数。

只是将 $a_i$ 缩了一半，一样的意思。

**解法一**　下面设 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，并记 $S_0 = 0$，那么数列 $\{a_n\}$ 与 $\{S_n\}$ 一一对应。

由 $a_i = 1$ 或 $-1$ 可知 $S_n$ 为偶数当且仅当 $n$ 为偶数，$S_n$ 为奇数当且仅当 $n$ 为奇数。

用 $S_n$ 可以更好地看清题目中的条件，即

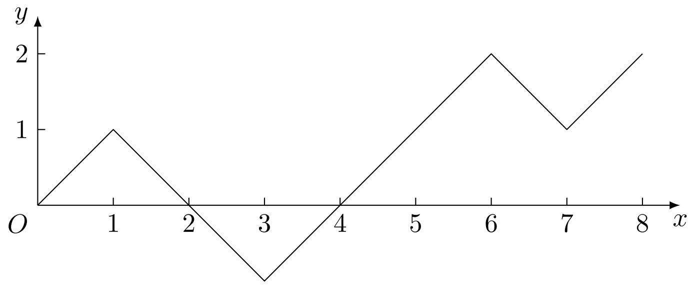
$$\left|\sum_{i=2k-1}^{2l} a_i\right| \leqslant 2 \iff |S_{2l} - S_{2(k-1)}| \leqslant 2,$$

以及

$$\frac{a_{2k-1}}{a_{2k}} \neq 1 \iff a_{2k-1} = a_{2k} = \pm 1 \iff |S_{2k} - S_{2(k-1)}| = 2,$$

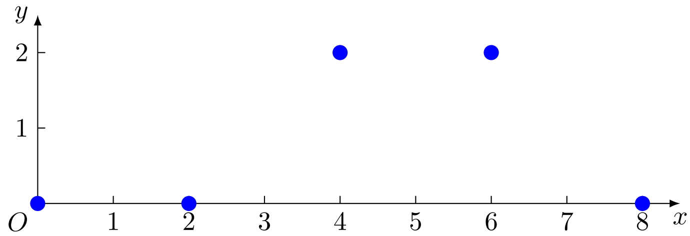
可以看出，条件都只是针对 $\{S_n\}$ 中的偶数项，即 $\{S_{2n}\}$ 的任意两项之差不能超过 2，并且至少有两项之差为 2，由于 $S_0 = 0$，而且 $S_{2n}$ 为偶数，可见 $S_{2n}$ 的值域要么是 $\{0, 2\}$，要么是 $\{0, -2\}$，下面只考虑前者，后者是同理的。

为了方便直观理解，下面用折线图来表示 $\{S_n\}$，例如当 $\{S_n\} = \{0, 1, 0, -1, 0, 1, 2, 1, 2, \ldots\}$ 时可用下图表示

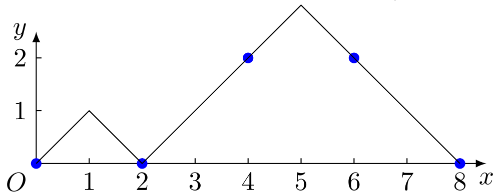


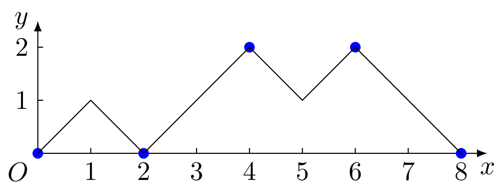
于是问题就是要确定可以有多少条符合条件的这样的折线。

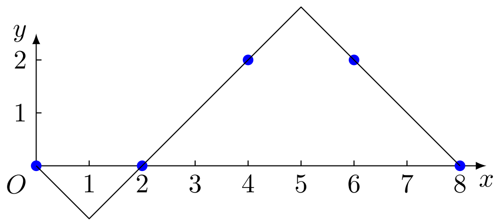
因为 $S_{2n}$ 的值域为 $\{0, 2\}$，我们先在 $x$ 轴和 $y = 2$ 上标出 $S_{2n}$，例如

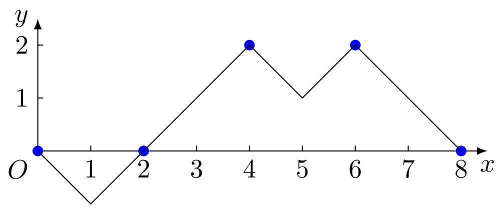


那么这部分点之间怎样连接？由于 $a_i = \pm 1$，而 $S_{2n-1}$ 也没有别的要求，于是此例的点有以下连接方式









也就是说，数列 $\{S_{2n}\}$ 在递增或递减的地方，之间的连线只有一种选择，而不增不减的地方则有两种选择。

因此，我们先取定增或减的位置，设增减次数共 $r$ 次，这一步有 $C_m^r$ 种取法，由于必然先增后减而且交替，即位置取定后所有增减都被确定，剩下的 $m-r$ 个不增不减的位置每处都有两种选择，因此共有 $C_m^r 2^{m-r}$ 条折线的可能。所以，当 $r$ 取遍 1 到 $m$ 时，总数就是

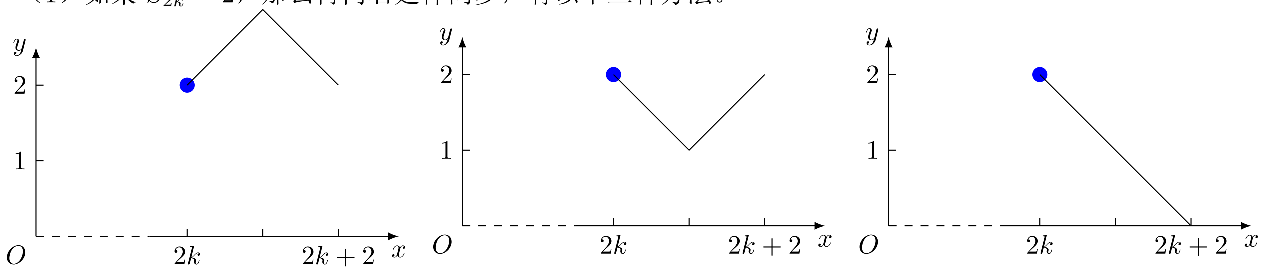
$$\sum_{r=1}^{m} C_m^r 2^{m-r} = \sum_{r=0}^{m} C_m^r 2^{m-r} 1^r - 2^m = (2+1)^m - 2^m = 3^m - 2^m.$$

最后别忘记还有值域为 $\{0,-2\}$ 的情况，所以所求的结果为 $2(3^m-2^m)$。 □

**解法二**　前面的约定与解法一相同，同样我们只需要考虑 $S_{2n}$ 的值域为 $\{0,2\}$ 的情况。

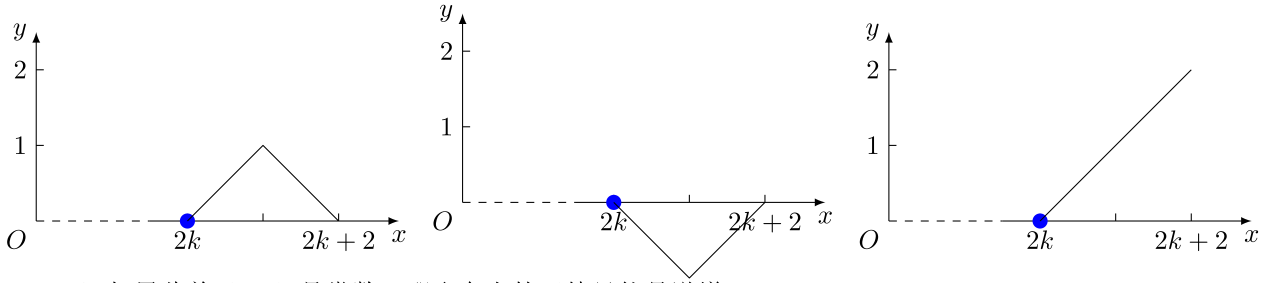
设 $m=k$ 时符合条件的折线条数为 $f(k)$，那么当 $m=k+1$ 时，分两类讨论：

（1）如果 $S_{2k}=2$，那么再向右延伸两步，有以下三种方法。




（2）如果 $S_{2k}=0$，再分两小类：

（2-1）如果此前 $\{S_{2n}\}$ 不是常数，则类似于（1），有以下三种方法。




（2-2）如果此前 $\{S_{2n}\}$ 是常数，那么向右的延伸只能是递增。

综合（1）及（2-1）的总数为 $3f(k)$，而（2-2）中由于前面全都有两种选择，总数为 $2^k$，故综上有

$$f(k+1) = 3f(k) + 2^k,$$

又易知 $f(1)=1$，故解得 $f(m)=3^m-2^m$。

同样地，别忘记还有值域为 $\{0,-2\}$ 的情况，所以所求的结果为 $2(3^m-2^m)$。 □

kuing 2014-1-14