

笛卡尔定理与一类多圆相切问题

王永喜 李奋平

(山西大学附属中学, 030006)

中图分类号: O123.1 文献标识码: A 文章编号: 1005-6416(2016)05-0012-05

先从一个非常经典的几何问题谈起.

引例 如图1, 圆心为 A, B, C 的三个圆彼此外切, 且均与直线 l 相切, 设三个圆的半径分别为 a, b, c ($0 < c < a < b$). 证明:

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}. \quad ①$$

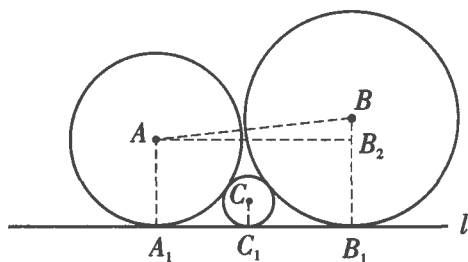


图1

收稿日期: 2016-01-06 修回日期: 2016-03-03

【结构联想】 由

$$\begin{aligned} 4pq &= (p+q)^2 - (p-q)^2 \\ &\leq 31^2 - 1 = 960, \\ \text{则 } pq &\leq 240. \end{aligned}$$

$$\text{故 } (a_i - b_i) + (b_j - a_j) \geq \frac{31A}{240}.$$

另一方面, 不妨设 $i > j$. 则

$$\begin{aligned} (a_i - b_i) + (b_j - a_j) &= a_i - (b_i - b_j) - a_j \\ &\leq (1984 + i) - (i - j) - j = 1984. \end{aligned}$$

$$\text{故 } \frac{31A}{240} \leq 1984$$

$$\Rightarrow A \leq 64 \times 240 = 15360$$

$$\Rightarrow S = 2A \leq 30720.$$

最后, 从等号成立的条件入手, 可取 $p = 15, q = 16$.

此问题不难.

注意到,

$$\begin{aligned} A_1B_1 &= 2\sqrt{ab}, B_1C_1 = 2\sqrt{bc}, A_1C_1 = 2\sqrt{ac}, \\ A_1C_1 + B_1C_1 &= A_1B_1. \end{aligned}$$

因此, 式①成立.

事实上, 引例正是本文所要介绍的笛卡尔定理的特例.

下面给出该定理的具体表述与证明.

笛卡尔定理^[1] 若平面上四个半径为 r_1, r_2, r_3, r_4 的圆两两相切于不同点, 则其半径满足以下结论:

(1) 若四圆两两外切, 则

$$\left(\sum_{i=1}^4 \frac{1}{r_i} \right)^2 = 2 \sum_{i=1}^4 \frac{1}{r_i^2}; \quad ①$$

再注意到,

$$15360 = 1024 \times 15 = 960 \times 16.$$

可构造

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, \dots, a_{31}) &= (1, 2, \dots, 15, 2000, 2001, \dots, 2015), \\ (b_1, b_2, \dots, b_{31}) &= (1025, 1026, \dots, 1055), \\ \text{此时, } S &= 1024 \times 15 + 960 \times 16 = 30720, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{且 } a_1 + a_2 + \dots + a_{31} &= b_1 + b_2 + \dots + b_{31} = 32240, \end{aligned}$$

符合要求.

综上, S 的最大值为 30720.

【注】若取 $p = 16, q = 15$, 则有如下构造:

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, \dots, a_{31}) &= (1, 2, \dots, 16, 2001, 2002, \dots, 2015), \\ (b_1, b_2, \dots, b_{31}) &= (961, 962, \dots, 991). \end{aligned}$$

(2)若半径为 r_1, r_2, r_3 的圆内切于半径为 r_4 的大圆中,则

$$\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4}\right)^2 = 2 \sum_{i=1}^4 \frac{1}{r_i^2}. \quad (2)$$

证明 事实上,平面上四个圆满足两两相切,要么四个圆两两外切,要么其中三个圆两两外切且同时内切于第四个圆中,即有定理中的情形(1)和(2).

下面分类讨论.

(1)四圆两两外切.

如图2,令

$$O_1O_2 = r_1 + r_2 = a, O_1O_3 = r_1 + r_3 = b,$$

$$O_2O_3 = r_2 + r_3 = c, OO_3 = r_3 + r_4 = x,$$

$$OO_2 = r_2 + r_4 = y, OO_1 = r_1 + r_4 = z,$$

$$\angle O_1OO_2 = \alpha, \angle O_3OO_1 = \beta, \angle O_2OO_3 = \gamma.$$

则 $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$.

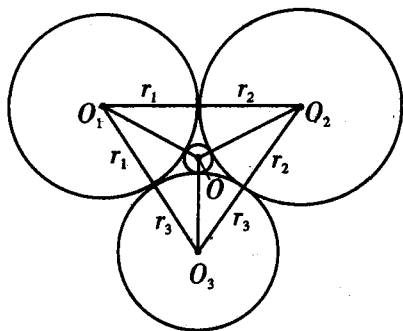


图2

由余弦定理得

$$\cos \alpha = \frac{y^2 + z^2 - a^2}{2yz}, \quad (3)$$

$$\cos \beta = \frac{z^2 + x^2 - b^2}{2zx}, \quad (4)$$

$$\cos \gamma = \frac{x^2 + y^2 - c^2}{2xy}. \quad (5)$$

注意到,

$$\cos \gamma = \cos(\alpha + \beta)$$

$$= \cos \alpha \cos \beta - \sqrt{(1 - \cos^2 \alpha)(1 - \cos^2 \beta)}.$$

将式③~⑤代入上式,化简得

$$2z^2(x^2 + y^2 - c^2) + (y^2 + z^2 - a^2)(z^2 + x^2 - b^2)$$

$$= \sqrt{[4y^2z^2 - (y^2 + z^2 - a^2)^2][4z^2x^2 - (z^2 + x^2 - b^2)^2]}.$$

⑥

式⑥两边平方并化简,再将 r_1, r_2, r_3, r_4 代入得

$$r_4 = \frac{r_1 r_2 r_3}{2\sqrt{r_1 r_2 r_3(r_1 + r_2 + r_3)} + r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}. \quad (7)$$

从而,式①成立.

(2)三个圆内切于半径为 r_4 的大圆中.

用同样的方法,此时,

$$x = r_4 - r_3, y = r_4 - r_2, z = r_4 - r_1,$$

a, b, c 不变,代入式⑥得

$$r_4 = \frac{r_1 r_2 r_3}{2\sqrt{r_1 r_2 r_3(r_1 + r_2 + r_3)} - (r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3)}. \quad (8)$$

从而,式②成立.

为什么引例是笛卡尔定理的特例?事实上,由式⑦得

$$\frac{1}{r_4} = 2 \sqrt{\frac{1}{r_2 r_3} + \frac{1}{r_3 r_1} + \frac{1}{r_1 r_2}} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}.$$

当 $r_3 \rightarrow +\infty$ 时,

$$\frac{1}{r_4} = 2 \sqrt{\frac{1}{r_1 r_2}} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{r_4}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}.$$

这正是引例的结论.

同样地,由式⑧得

$$\frac{1}{r_4} = 2 \sqrt{\frac{1}{r_2 r_3} + \frac{1}{r_3 r_1} + \frac{1}{r_1 r_2}} - \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right).$$

此时,令 $r_4 \rightarrow +\infty$,亦得引例结论.

再给出笛卡尔定理的具体应用.

例1 设在互相内切的两圆间隙中,依次作四个内切圆.若所作四个圆除首末二者外各依次相外切,则所作四个圆的半径 r_1, r_2, r_3, r_4 满足

$$\frac{1}{r_1} - \frac{3}{r_2} + \frac{3}{r_3} - \frac{1}{r_4} = 0.$$

例1被称作周达定理.该定理最早出现在文[2]中,文[1]、[3]均给出了详实的证明,其中文[3]用反演变换给出了该定理的

简单证明,并将结论推广到了 n 个圆的情形.

证明 如图3,设已知两圆为 $\odot O$ 、 $\odot O'$, 半径分别为 a 、 b . 所作的四个圆依次为 $\odot O_1$ 、 $\odot O_2$ 、 $\odot O_3$ 、 $\odot O_4$.

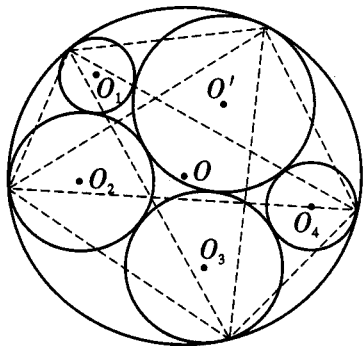


图3

则对 $\odot O$ 、 $\odot O'$ 、 $\odot O_1$ 、 $\odot O_2$ 利用笛卡尔定理中的式②得

$$\left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}\right).$$

类似地,对 $\odot O$ 、 $\odot O'$ 、 $\odot O_2$ 、 $\odot O_3$ 利用笛卡尔定理得

$$\left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2}\right).$$

两式相减得

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_3}\right)\left(-\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{r_2} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3}\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_3}\right)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3}\right), \end{aligned}$$

$$\text{即 } \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} - \frac{2}{r_2} = -\frac{2}{a} + \frac{2}{b}.$$

$$\text{类似地, } \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4} - \frac{2}{r_3} = -\frac{2}{a} + \frac{2}{b}.$$

以上两式联立即得结论.

例2 记“ \sum ”表示轮换对称和. 设 a 、 b 、 $c \in \mathbf{R}_+$. 试求方程

$$\sum \sqrt{abx(a+b+x)} = \sqrt{abc(a+b+c)}$$

的正根 x .^[4]

解 如图4,以 $a+b$ 、 $b+c$ 、 $a+c$ 为边构成 $\triangle ABC$,以 A 、 B 、 C 为圆心依次以 a 、 b 、 c 为半径作圆,设 $\odot O$ 与上述三个圆外切,其半径为 x_0 .

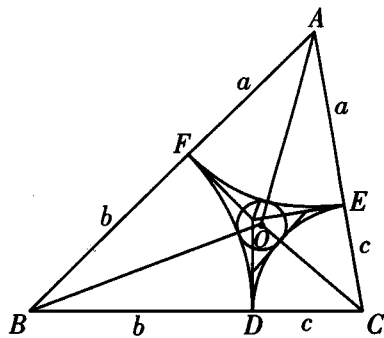


图4

由于 $S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OAC} = S_{\triangle ABC}$,则由海伦公式得

$$\sum \sqrt{abx_0(a+b+x_0)} = \sqrt{abc(a+b+c)}.$$

因此, x_0 即为所求的正根.

注意到,已知条件正是笛卡尔定理中四个圆两两外切的情形.

由式⑦得

$$x_0 = \frac{abc}{ab+bc+ca+2\sqrt{abc(a+b+c)}},$$

即得所求正根.

例3 如图5,设最大半圆半径为1,小半圆半径为 $\frac{1}{2}$. 求第 k 个阴影圆的半径.

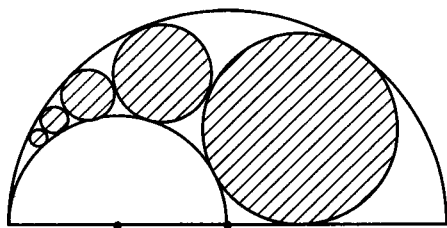


图5

解 假设第 k 个阴影圆的半径为 r_k . 则由笛卡尔定理得

$$\left(2 - 1 + \frac{1}{r_k} + \frac{1}{r_{k+1}}\right)^2 = 2\left(1 + 4 + \frac{1}{r_k^2} + \frac{1}{r_{k+1}^2}\right).$$

类似地,

$$\left(2 - 1 + \frac{1}{r_k} + \frac{1}{r_{k-1}}\right)^2 = 2\left(1 + 4 + \frac{1}{r_k^2} + \frac{1}{r_{k-1}^2}\right).$$

两式相减得

$$2\left(\frac{1}{r_{k+1}} - \frac{1}{r_{k-1}}\right)\left(\frac{1}{r_{k+1}} + \frac{1}{r_{k-1}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{r_{k+1}} - \frac{1}{r_{k-1}} \right) \left(2 + \frac{2}{r_k} + \frac{1}{r_{k-1}} + \frac{1}{r_{k+1}} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r_{k+1}} + \frac{1}{r_{k-1}} - \frac{2}{r_k} = 2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{r_{k+1}} - \frac{1}{r_k} \right) - \left(\frac{1}{r_k} - \frac{1}{r_{k-1}} \right) = 2.$$

累加得

$$\frac{1}{r_k} = k^2 - k + C \quad (C \text{ 为待定系数}).$$

$$\text{因此, } \frac{1}{r_1} = C, \frac{1}{r_2} = 2 + C.$$

由于大圆、小半圆和第一个阴影圆、第二个阴影圆相切,则

$$\begin{aligned} & (-1 + 2 + C + 2 + C)^2 \\ &= 2[1 + 4 + C^2 + (C + 2)^2] \\ \Rightarrow C &= \frac{9}{4} \Rightarrow r_k = \frac{4}{4k^2 - 4k + 9}. \end{aligned}$$

例4 设 $\triangle ABC$ 的半周长为 p ,内切圆半径为 r ,分别以 BC 、 CA 、 AB 为直径在 $\triangle ABC$ 的外侧作半圆,设与这三个半圆均相切的圆 Γ 的半径为 t .证明:

$$\frac{p}{2} < t \leq \frac{p}{2} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) r. \quad \textcircled{9}$$

证明 如图6,设圆 Γ 的圆心为 O , D 、 E 、 F 分别为边 BC 、 CA 、 AB 的中点,圆 Γ 与三个半圆的切点分别为 D' 、 E' 、 F' ,又设这三个半圆的半径分别为 d' 、 e' 、 f' .则 DD' 、 EE' 、 FF' 均过点 O ,且 $p = d' + e' + f'$.

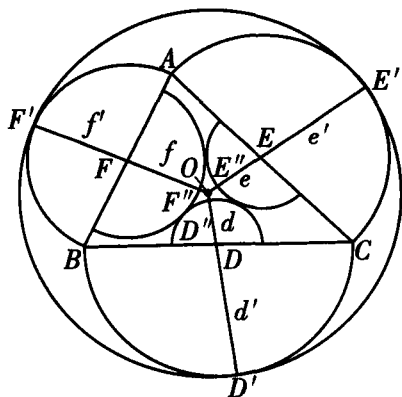


图6

$$\text{记 } d = \frac{p}{2} - d' = \frac{-d' + e' + f'}{2},$$

$$e = \frac{p}{2} - e' = \frac{d' - e' + f'}{2},$$

$$f = \frac{p}{2} - f' = \frac{d' + e' - f'}{2}.$$

$$\text{则 } d + e + f = \frac{p}{2}.$$

在 $\triangle ABC$ 内部,分别以 D 、 E 、 F 为圆心依次以 d 、 e 、 f 为半径作三个较小的半圆.

$$\text{因为 } d + e = f' = \frac{1}{2}AB = DE,$$

$$e + f = d' = \frac{1}{2}BC = EF,$$

$$f + d = e' = \frac{1}{2}AC = FD,$$

所以,这三个较小的半圆两两相切,且这些切点分别为 $\triangle DEF$ 的内切圆与其三边的切点.

设 DD' 、 EE' 、 FF' 与较小的半圆分别交于点 D'' 、 E'' 、 F'' .

因为这些半圆互不重叠,且 O 为这些半圆外部的点,所以, $D'O > D'D''$,即 $t > \frac{p}{2}$.

因此,式⑨左边得证.

$$\text{设 } g = t - \frac{p}{2}. \text{ 则}$$

$$OD'' = OE'' = OF'' = g.$$

于是,以 O 为圆心、 g 为半径的圆与这三个互切的半圆均相切.

由笛卡尔定理得

$$2 \left(\frac{1}{d^2} + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{f^2} + \frac{1}{g^2} \right) = \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} + \frac{1}{g} \right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{g} = \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} + 2\sqrt{\frac{d+e+f}{def}}.$$

$$\text{又 } S_{\triangle DEF} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC} = \frac{pr}{4}$$

$$= \sqrt{(d+e+f)def},$$

$$\text{则 } \frac{r}{2} = \frac{2}{p} \sqrt{(d+e+f)def} = \sqrt{\frac{def}{d+e+f}}.$$

故要证明式⑨右边,即等价证明

$$\frac{r}{2g} \geq \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}.$$

注意到,

$$\begin{aligned} \frac{r}{2g} &= \sqrt{\frac{def}{d+e+f}} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} + 2\sqrt{\frac{d+e+f}{def}} \right) \\ &= \frac{x+y+z}{\sqrt{xy+yz+zx}} + 2, \end{aligned}$$

其中, $xd=1, ye=1, zf=1$.

故只要证

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx). \quad (10)$$

$$\text{又 } (x+y+z)^2 - 3(xy+yz+zx)$$

$$= \frac{1}{2}[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2]$$

$$\geq 0,$$

从而, 式⑩成立.

因此, 式⑨右边也成立.

笛卡尔定理在三维空间中仍有类似的结论: 若五个球的半径为 $r_i (i=1, 2, \dots, 5)$, 满足任意一个球与其他四个球外切, 则

$$\left(\sum_{i=1}^5 \frac{1}{r_i} \right)^2 = 3 \sum_{i=1}^5 \frac{1}{r_i^2}.$$

利用三维的笛卡尔定理, 就可以解决下面的例 5.

例 5 空间有四个球, 它们的半径分别

为 2、2、3、3. 每个球均与其余三个球外切, 另有一个小球与这四个球均外切. 求该小球的半径.

(1995, 中国数学奥林匹克)

解 设所求的球的半径为 $r = \frac{1}{x}$. 则由

笛卡尔定理得

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + x \right)^2 \\ &= 3 \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + x^2 \right) \\ &\Rightarrow \left(\frac{5}{3} + x \right)^2 = 3 \left(\frac{13}{18} + x^2 \right) \\ &\Rightarrow x = \frac{11}{6} \Rightarrow r = \frac{6}{11}. \end{aligned}$$

参考文献:

- [1] 沈文选, 杨清桃 编著. 几何瑰宝: 平面几何 500 名题暨 1 000 条定理(上) [M]. 哈尔滨工业大学出版社, 2010.
- [2] 梁绍鸿 编著. 初等数学复习及研究(平面几何) [M]. 北京: 人民教育出版社, 1958.
- [3] 萧振纲 著. 几何变换与几何证题 [M]. 哈尔滨工业大学出版社, 2010.
- [4] 中国国家集训队教练组 编. 走向 IMO: 数学奥林匹克试题集锦(2007) [M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2007.

敬告读者

经天津市新闻出版局备案,《中等数学》编辑部为帮助读者更好地了解世界数学竞赛状况, 给数学爱好者提供更丰富、更详尽的世界各国及地区数学竞赛试题, 今年将继续出版《2014—2015 国内外数学竞赛题及精解》(以下简称“2016 年增刊”)。2016 年增刊精选了国内外三十多个国家及地区的竞赛试题, 并给出详细解答。本增刊资料性强, 权威性高, 有助于读者拓宽视野, 进一步提高自身竞赛水平, 适合准备参加全国高中数学联赛的学生及辅导教师阅读。

2016 年增刊将于 6 月底出版, 定价 38 元。编辑部从即日起接受读者订购。邮购单册 43 元(含邮挂费)。

如需办理快递请与发行部联系。

发行部地址: 300074, 天津市河西区吴家窑大街 57 号增 1 号

电话: 022-23542233 15822631163 **开户行:** 中国建设银行天津河北支行

户名: 姜姗姗 **账号:** 4367 4200 6171 0117 055

本刊编辑部