也扯向量与三角形的经典公式

命题 1. 已知点 P 在 $\triangle ABC$ 内部，$x, y, z \in \mathbb{R}$ 且不全为 0，则

$$x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PB}+z\overrightarrow{PC}=\mathbf{0} \iff S_{\triangle PBC}:S_{\triangle PCA}:S_{\triangle PAB}=x:y:z, \tag{1}$$

亦即是

$$S_{\triangle PBC}\cdot\overrightarrow{PA}+S_{\triangle PCA}\cdot\overrightarrow{PB}+S_{\triangle PAB}\cdot\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}. \tag{2}$$

这个命题大家应该都很熟悉，可以说已经被“玩烂了”的，但是最可惜的地方在于“点 P 在 $\triangle ABC$ 内部”这句，限制了 P。有人说如果点 P 在 $\triangle ABC$ 外，则只要将 $x:y:z$ 改成 $|x|:|y|:|z|$，但是这样的话，式 (1) 中间就不能用 $\iff$ 了，得改成 $\implies$，而且式 (2) 也不恒成立了，虽然可以分 P 在不同的区域将某些“$+$”变成“$-$”，但是用起来的时候可能产生麻烦，少不免分类讨论。

为了得到统一公式，我们引入一些有向的东西。下面约定：

- 垂直于屏幕向外的方向为正方向，正方向上的单位向量为 $\boldsymbol{k}$。
- 有向面积 $\overline{S_{\triangle ABC}}$，它满足当 A, B, C 逆时针排列时 $\overline{S_{\triangle ABC}}=S_{\triangle ABC}$，顺时针时 $\overline{S_{\triangle ABC}}=-S_{\triangle ABC}$，当 $\triangle ABC$ 退化为三点共线甚至三点重合时，规定 $\overline{S_{\triangle ABC}}=S_{\triangle ABC}=0$。
- 有向角 $\measuredangle AOB$，它表示射线 OA 绕 O 逆时针旋转至与射线 OB 首次重合所转过的角度。

这样做其实是为了迎合叉乘，根据叉乘的定义，对于任意的 $\triangle ABC$（包括退化情形），总有

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\sin\measuredangle BAC\cdot\boldsymbol{k}=2\overline{S_{\triangle ABC}}\cdot\boldsymbol{k}.$$

由于关系到时针方向，因此必须注意字母的顺序，不能随便调换，实际上我们有

$$\overline{S_{\triangle ABC}}=\overline{S_{\triangle BCA}}=\overline{S_{\triangle CAB}}=-\overline{S_{\triangle ACB}}=-\overline{S_{\triangle BAC}}=-\overline{S_{\triangle CBA}},$$
$$\measuredangle BOA=2\pi-\measuredangle AOB.$$

在以上约定下，我们有如下更一般的命题。

命题 2. 平面上有任意的四点 P, A, B, C（不必相异），则恒有

$$\overline{S_{\triangle PBC}}\cdot\overrightarrow{PA}+\overline{S_{\triangle PCA}}\cdot\overrightarrow{PB}+\overline{S_{\triangle PAB}}\cdot\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}. \tag{3}$$

证明 设 $\overline{S_{\triangle PBC}}\cdot\overrightarrow{PA}+\overline{S_{\triangle PCA}}\cdot\overrightarrow{PB}+\overline{S_{\triangle PAB}}\cdot\overrightarrow{PC}=\boldsymbol{m}$，则

$$\begin{aligned}2\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{m}&=\left(2\overline{S_{\triangle PBC}}\cdot\boldsymbol{k}\right)\times\overrightarrow{PA}+\left(2\overline{S_{\triangle PCA}}\cdot\boldsymbol{k}\right)\times\overrightarrow{PB}+\left(2\overline{S_{\triangle PAB}}\cdot\boldsymbol{k}\right)\times\overrightarrow{PC}\\&=\left(\overrightarrow{PB}\times\overrightarrow{PC}\right)\times\overrightarrow{PA}+\left(\overrightarrow{PC}\times\overrightarrow{PA}\right)\times\overrightarrow{PB}+\left(\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}\right)\times\overrightarrow{PC},\end{aligned}$$

由向量三重积公式 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$，可知上式最后展开化简等于零向量，所以

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{m}=\mathbf{0},$$

又

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m}=\overline{S_{\triangle PBC}}\cdot\boldsymbol{k}\cdot\overrightarrow{PA}+\overline{S_{\triangle PCA}}\cdot\boldsymbol{k}\cdot\overrightarrow{PB}+\overline{S_{\triangle PAB}}\cdot\boldsymbol{k}\cdot\overrightarrow{PC}=0,$$

而 $\boldsymbol{k}\neq\mathbf{0}$，故只能是 $\boldsymbol{m}=\mathbf{0}$，命题 2 得证。 □

这样一来，命题 1 就是命题 2 的推论了，因为如果 P 在三角形内部，那么 $\overline{S_{\triangle PBC}}$, $\overline{S_{\triangle PCA}}$, $\overline{S_{\triangle PAB}}$ 必然同号，从而可以直接“约掉上面的横线”。

为什么命题 2 不写出面积比的形式？皆因有向面积可以为 0，为了避免不必要的麻烦，就不用比例了。

如果想用命题 1 的结论推出 P 为外心或垂心情况下的公式，由于外心和垂心有可能在三角形外，难免有分类讨论的麻烦，而利用命题 2 来推就可以不用分类。

当 P 为外心 O 时，由圆心角与圆周角的关系可知 $\measuredangle BOC = 2\measuredangle BAC$ 恒成立，于是

$$2\overline{S_{\triangle OBC}} = \left|\overrightarrow{OB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OC}\right| \cdot \sin\measuredangle BOC = R^2 \sin 2\measuredangle BAC,$$

同理有 $2\overline{S_{\triangle OCA}} = R^2 \sin 2\measuredangle CBA$, $2\overline{S_{\triangle OAB}} = R^2 \sin 2\measuredangle ACB$，代入命题 2 得

$$\sin 2\measuredangle BAC \cdot \overrightarrow{OA} + \sin 2\measuredangle CBA \cdot \overrightarrow{OB} + \sin 2\measuredangle ACB \cdot \overrightarrow{OC} = \mathbf{0},$$

而 $\measuredangle BAC, \measuredangle CBA, \measuredangle ACB$ 要么为 A, B, C 要么为 $2\pi - A, 2\pi - B, 2\pi - C$，上式都能化为

$$\sin 2A \cdot \overrightarrow{OA} + \sin 2B \cdot \overrightarrow{OB} + \sin 2C \cdot \overrightarrow{OC} = \mathbf{0}, \tag{4}$$

式 (4) 就是我们熟知的外心向量公式。

再将式 (4) 变形一下，由 $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$ 代入整理可得

$$\overrightarrow{AO} = \frac{\sin 2B \cdot \overrightarrow{AB} + \sin 2C \cdot \overrightarrow{AC}}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}, \tag{5}$$

式 (5) 也是很常用的公式。

当 P 为垂心 H 时也可以用类似于上面推外心的方法来推导，但这里提供另一种的方法。

设 BC 的中点为 D，则由欧拉线定理可知恒有

$$\overrightarrow{HA} = -2\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC},$$

同理有类似的两式，于是

$$\overrightarrow{OA} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}}{2} = \frac{\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HC}}{2},$$

同理有类似的两式，代入式 (4) 即得

$$\sin 2A \cdot \left(\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HC}\right) + \sin 2B \cdot \left(\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA}\right) + \sin 2C \cdot \left(\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HB}\right) = \mathbf{0},$$

整理即得

$$(\sin 2A - \sin 2B - \sin 2C)\overrightarrow{HA} + (\sin 2B - \sin 2C - \sin 2A)\overrightarrow{HB} + (\sin 2C - \sin 2A - \sin 2B)\overrightarrow{HC} = \mathbf{0},$$

而

$$\begin{aligned}\sin 2A - \sin 2B - \sin 2C &= 2\sin A\cos A - 2\sin(B+C)\cos(B-C)\\&= -2\sin A\cos(B+C) - 2\sin A\cos(B-C)\\&= -4\sin A\cos B\cos C,\end{aligned}$$

同理有另外两式，因此

$$\sin A\cos B\cos C\cdot\overrightarrow{HA}+\sin B\cos C\cos A\cdot\overrightarrow{HB}+\sin C\cos A\cos B\cdot\overrightarrow{HC}=\mathbf{0}, \tag{6}$$

式 (6) 对任意三角形成立，而当 $\triangle ABC$ 不是直角三角形时，两边除以 $\cos A\cos B\cos C$ 即得

$$\tan A\cdot\overrightarrow{HA}+\tan B\cdot\overrightarrow{HB}+\tan C\cdot\overrightarrow{HC}=\mathbf{0}, \tag{7}$$

式 (7) 就是我们熟悉的垂心向量公式，它对非直角三角形成立。

将式 (7) 变形可得

$$\overrightarrow{AH}=\frac{\tan B\cdot\overrightarrow{AB}+\tan C\cdot\overrightarrow{AC}}{\tan A+\tan B+\tan C}, \tag{8}$$

式 (8) 对非直角三角形成立。

至于重心、内心我就不推了，因为一定在三角形内部，用命题 1 的结论足矣。再略讲一下旁心，其实也比较简单，因为旁心的位置相对确定，比如说 I_a 是与 BC 边相切的旁切圆的圆心，半径为 r_a，那么显然 I_a, B, C 的时针顺序必然与 I_a, C, A 和 I_a, A, B 的都相反，因此总有

$$\overline{S_{\triangle I_aBC}}:\overline{S_{\triangle I_aCA}}:\overline{S_{\triangle I_aAB}}=-\frac{ar_a}{2}:\frac{br_a}{2}:\frac{cr_a}{2}=-a:b:c,$$

于是有

$$-a\overrightarrow{I_aA}+b\overrightarrow{I_aB}+c\overrightarrow{I_aC}=\mathbf{0},$$

再变形又有

$$\overrightarrow{AI_a}=\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{b+c-a}.$$