怎样由同一个三角形构造一批命题

等腰三角形的顶角为 $20°$，这是一个极为普通的三角形，用它构造的一批命题却是题型各异，思路新颖，解法巧妙，令人耳目一新，现介绍如下，以飨读者.

例 1 如图 1，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，$\angle A = 20°$，D 为 AC 上一点，$\angle DBC = 50°$，E 为 AB 上一点，$\angle ECB = 40°$，求证：$ED = EB$.

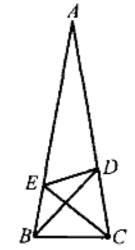

图 1

证明 由 $\angle DBC = 50°$，可知

$$\angle BDC = 50° = \angle DBC$$

所以

$$BC = CD$$

由 $\angle ECB = 40°$，可知 $CE \perp BD$.

故 EC 为 BD 的中垂线. 所以

$$ED = EB$$

例 2 如图 2，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，$\angle A = 20°$，D 为 AC 上一点，$\angle DBC = 50°$，E 为 AB 上一点，$\angle ECB = 20°$，求 $\angle BDE$ 的度数.

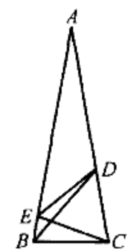

图 2

解 在 $\triangle BCD$ 中，易知 $BC = DC$. 在 $\triangle BCE$ 中，易知 $EC = BC$. 所以

$$CD = CE = CB$$

即 C 为 $\triangle BDE$ 的外心. 所以

$$\angle BDE = \frac{1}{2}\angle BCE = 10°$$

例 3 在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，$\angle A = 20°$，D 为 AC 上一点，$\angle DBC = 60°$，E 为 AB 上一点，$\angle ECB = 50°$，求 $\angle BDE$ 的度数.

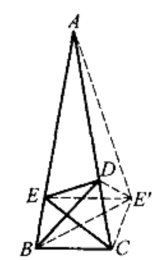

图 3

解 如图 3，设 E' 为 E 关于 AC 的对称点，连 $E'A$，$E'B$，$E'C$，$E'D$，$E'E$. 易知 $\triangle E'EC$ 为正三角形，BE' 为 EC 的中垂线，D 为 $\triangle ABE'$ 的内心，有

$$\angle AE'D = \frac{1}{2}\angle AE'B = 50°$$

可得

$$\angle AED = 50°$$

于是

$$\angle BDE = \angle AED - \angle ABD = 30°$$

例 4 在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，$\angle A = 20°$，D 为 AC 上一点，$\angle DBC = 60°$，E 为 AB 上一点，$\angle ECB = 30°$. 求证：$EC = ED$.

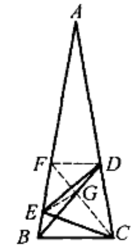

图 4

证明 如图 4，过 D 作 CB 的平行线交 AB 于 F，连 CF 交 BD 于 G，连 EG. 易知 $\triangle DFG$ 与 $\triangle GBC$ 均为等边三角形，EC 是 BG 的中垂线，有 $EG = BE$. 所以

$$\angle EGB = \angle EBG = 20°$$

且

$$\angle BEG = 2\angle BEC = 140°$$

故

$$\angle FEG = 40° = \angle EFG$$

从而

$$EG = FG$$

所以

$$EG = GD$$

$$\angle BDE = \frac{1}{2}\angle EGB = 10°$$

从而

$$\angle EDC = 50° = \angle ECD$$

故

$$EC = ED$$

例5 在$\triangle ABC$中,$AB = AC$,$\angle A = 20°$,D为AC上一点,$\angle DBC = 70°$,E为AB上一点,$\angle ECB = 50°$,求证:$AD = DE = EB = BC$.

证明 如图5,以BC为一边在$\triangle ABC$内作正$\triangle FBC$,连FA,FD,可知AF为BC的中垂线,$\angle FAB = 10° = \angle DBA$,$\angle FBA = 20° = \angle DAB$,有$\triangle DAB \cong \triangle FBA$,得$AD = BF$,可知$DF \parallel AB$.所以

$$\angle FDC = \angle BAC = 20° = 2\angle FAD$$

于是 $DF = AD$

从而 $DF = BF = BC = BE$

因此$DEBF$为菱形.

有 $DE = EB = BF$

故 $AD = DE = EB = BC$

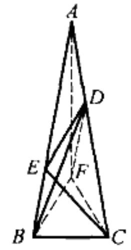

图5

例6 在$\triangle ABC$中,$AB = AC$,$\angle A = 20°$,D为AC上一点,$\angle DBC = 70°$,E为AB上一点,$\angle ECB = 60°$,求证:$BC \cdot BE = DB \cdot DE$.

证明 如图6,在EC上取点F,在AC上取点G,在AB上取点H,使得

$$AH = CG = BF = BC$$

连BF,BG,HF,HG,可知$\triangle FBC$为正三角形,由例5可知$AH = AD = BC$,$HFCG$为菱形,得$HG \parallel EC$,于是

$$\frac{AH}{AG} = \frac{AE}{AC} \quad 或 \quad \frac{AD}{AG} = \frac{AE}{AB}$$

可知

$$DE \parallel BG$$

有

$$\angle EDB = 20° = \angle BAD$$

于是

$$\triangle EDB \backsim \triangle DAB$$

有

$$\frac{ED}{AD} = \frac{BE}{BD} \quad 或 \quad \frac{ED}{BC} = \frac{BE}{BD}$$

所以

$$BC \cdot BE = DB \cdot DE$$

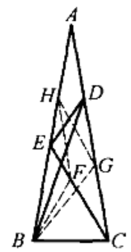

图6

例7 在$\triangle ABC$中,$AB = AC$,$\angle A = 20°$,在边AB上取点D,使得$AD = BC$,求$\angle BDC$的度数.

解 如图7,以BC为边在$\triangle ABC$内作正$\triangle EBC$,连AE.易知AE为BC的中垂线,有

$$\angle EAC = 10°$$

在$\triangle ADC$与$\triangle CEA$中

$$AD = BC = EC, AC = CA, \angle DAC = 20^\circ = \angle ECA$$

所以

$$\triangle ADC \cong \triangle CEA$$

故

$$\angle DCA = \angle EAC = 10^\circ$$

所以

$$\angle BDC = \angle DAC + \angle DCA = 30^\circ$$

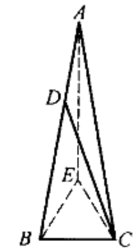

图 7

例 8　在 $\triangle ABC$ 中，E 是 BC 的中点，D 在 AC 边上，若 $\angle BAC = 60^\circ$，$\angle ACB = 20^\circ$，$\angle DEC = 80^\circ$，$S_{\triangle ABC} + 2S_{\triangle CDE} = \sqrt{3}$．求 AC 的长．

解　如图 8，在 AB 延长线上取点 F, G，使 $AF = AC, GF = AB$．连 FC, GC，易知，$\triangle FAC$ 为正三角形，$\triangle FGC \cong \triangle ABC$，$\triangle CGB \backsim \triangle CDE$．

由 E 为 BC 中点，知

$$\frac{S_{\triangle BCG}}{S_{\triangle CDE}} = \left(\frac{BC}{EC}\right)^2 = 4$$

所以

$$S_{\triangle BCG} = 4S_{\triangle CDE}$$

因为

$$\frac{\sqrt{3}}{4}AC^2 = S_{\triangle ACF} = 2S_{\triangle ABC} + S_{\triangle BCG} =$$
$$2S_{\triangle ABC} + 4S_{\triangle CDE} = 2(S_{\triangle ABC} + 2S_{\triangle CDE}) = 2\sqrt{3}$$

所以

$$AC^2 = 8 \Rightarrow AC = 2\sqrt{2}$$

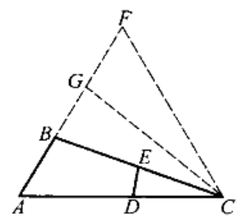

图 8

例 9　在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A = 20^\circ$，$AB = AC = a$，$BC = b$．求证：$a^3 + b^3 = 3a^2b$．

证明　如图 9，设 E 为 C 关于 AB 的对称点，F 为 B 关于 AC 的对称点，EF 分别交 AB, AC 于 M, N，有 $BE^2 = BM \cdot BA$，得

$$BM = \frac{b^2}{a}$$

于是

$$AM = AB - BM = \frac{a^2 - b^2}{a}$$

$$MN = \frac{AM \cdot BC}{AB} = \frac{b(a^2 - b^2)}{a^2}$$

所以

$$a = EF = EM + MN + NF = b + \frac{b(a^2 - b^2)}{a^2} + b$$

即

$$a = 2b + \frac{b(a^2 - b^2)}{a^2}$$

从而

$$a^3 + b^3 = 3a^2b$$

（田永海）

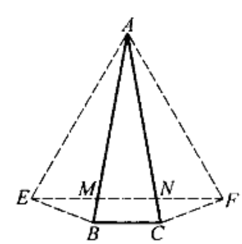

图 9