前两天网友 M εmoΓ ϒ (QQ:4677*****) 问我如下题目。

题目 单位圆 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ 内连接单位圆周 $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ 上两不同点且与 C 在这两点处垂直的圆弧或直线段称为单位圆 D 内的*双曲直线*（这里两条圆弧在交点处垂直是指这两条圆弧在交点处的切线垂直）。给定内一条双曲直线 L，则下列选项中正确的选项是______。

A. 存在 D 内一点，使得过该点的双曲直线都不与 L 垂直；

B. 存在与 L 相切于 D 内某一点的双曲直线；

C. 如选取合适的 L，则另可找到一条 D 内的双曲直线与 L 恰有两个交点；

D. 对 D 内任意不在 L 上的点，都存在过该点的且与 L 不相交的双曲直线。

这种题靠想象是不难想出答案来的，就是证起来不容易，所以特别适合做选择填空。

题目所说的“双曲直线”实际上就是正交圆的东西，只不过是只考虑其中一圆内部的弧。

为了严格证明，先做一些准备工作，顺便当作是对正交圆的一次小小的探索研究，因为其实在此之前我也只是知道正交圆的定义，并不清楚会有些什么性质。

定义 1. 设 $\odot O$ 半径为 R，定义点 P 对 $\odot O$ 的幂为 $OP^2 - R^2$。

从几何意义上看，当 P 在 $\odot O$ 外时，这个幂就相当于 P 对 $\odot O$ 的切线长的平方，在内部时也有几何意义，但由于时间关系这里就不描述了，主要是这里还用不到。

定义 2. 给定两个不同心的圆，则对两圆的幂相等的点的轨迹称为这两个圆的根轴。

定理 1. 根轴一定是直线，且与两圆连心线垂直，当两圆相交时，根轴为两交点所在直线，当两圆相切时，根轴为切点于的切线。

证明自己查百度，过程略。

定理 2. 若三个圆的圆心不共线，则它们两两的根轴共点。

由定义显然易证，过程略。

定义 3. 当两圆相交且交点对两圆的切线互相垂直，则称这两个圆正交。

定理 3. 已知半径为 R_1 的 $\odot O_1$ 与半径为 R_2 的 $\odot O_2$ 正交，则 $R_1^2 + R_2^2 = O_1O_2^2$。

由定义显然易证，过程略。

推论 3.1. 若两圆正交，则其中一圆的圆心必在另一圆之外。

定理 4. 已知 $\odot O_1, \odot O_2$ 不同圆心，若 $\odot O_3$ 与 $\odot O_1, \odot O_2$ 都正交，且三个圆的圆心共线，则 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外离或内含。

证明 设 $\odot O_1, \odot O_2, \odot O_3$ 的半径分别为 R_1, R_2, R_3，设 $O_3O_1 = d_1, O_3O_2 = d_2$，由定理 3 有 $R_1^2 + R_3^2 = d_1^2$，$R_2^2 + R_3^2 = d_2^2$。

若 O_3 在 O_1, O_2 之间，则由推论 3.1 知 O_3 都在 $\odot O_1, \odot O_2$ 之外，故 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 必然外离；

若 O_3 不在 O_1, O_2 之间，则

$$O_1O_2 = |d_1 - d_2| = \left|\sqrt{R_1^2 + R_3^2} - \sqrt{R_2^2 + R_3^2}\right| = \frac{|R_1^2 - R_2^2|}{\sqrt{R_1^2 + R_3^2} + \sqrt{R_2^2 + R_3^2}} < \frac{|R_1^2 - R_2^2|}{R_1 + R_2} = |R_1 - R_2|,$$

故此时 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 内含。 □

定理 5. 已知 $\odot O_1, \odot O_2$ 不同圆心，若 $\odot O_3$ 与 $\odot O_1, \odot O_2$ 都正交，则 O_3 一定在 $\odot O_1, \odot O_2$ 的根轴上。

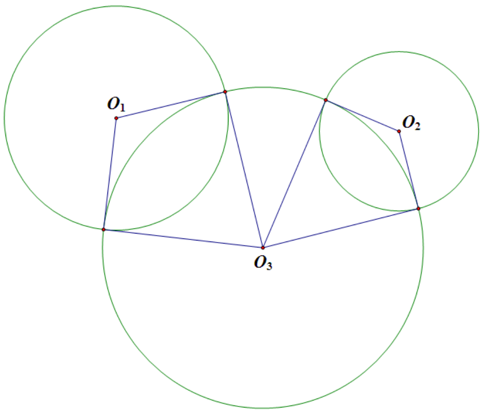

图 1

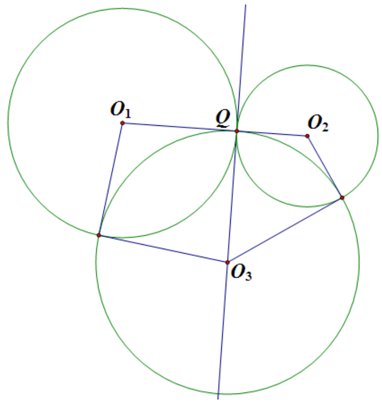

图 2

证明 因为 $\odot O_3$ 与 $\odot O_1, \odot O_2$ 都正交，故 O_3 对 $\odot O_1, \odot O_2$ 的切线长都为 $\odot O_3$ 的半径（如图 1），故必在 $\odot O_1, \odot O_2$ 的根轴上。 □

由定理 5 及定理 1 容易得出如下推论。

推论 5.1. 已知 $\odot O_1, \odot O_2$ 不同圆心且相切于 Q（外切或内切都可以），若 $\odot O_3$ 与 $\odot O_1, \odot O_2$ 都正交，则点 Q 必在 $\odot O_3$ 上（如图 2）。

推论 5.2. 已知 $\odot O_1, \odot O_2$ 不同圆心且相交于 A, B，若 $\odot O_3$ 与 $\odot O_1, \odot O_2$ 都正交，则 A, B 分居 $\odot O_3$ 内外（如图 3）。

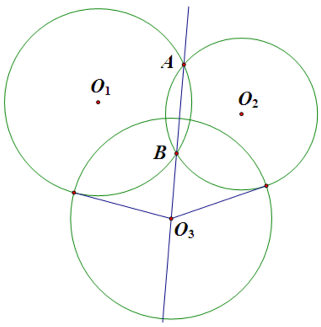

图 3

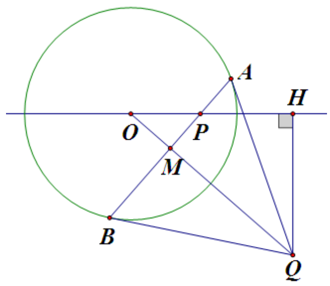

图 4

定理 6. 半径为 R 的 $\odot O$ 内有一定点 P，动弦 AB 过 P，圆在 A, B 处的切线相交于 Q，记点 Q 的轨迹为 l_P，则 l_P 是直线，记 O 到 l_P 的距离为 d，则 $l_P \perp OP$ 且 $d \cdot OP = R^2$。

证明 如图 4，作 $QH \perp OP$ 于 H，由 $OP \cdot OH = OM \cdot OQ = R^2$，即得证。 □

定理 7. 给定半径为 R 的 $\odot O$ 内有一定点 P，$\odot K$ 与 $\odot O$ 正交且恒过点 P，记点 K 的轨迹为 m_P，则 m_P 是直线，$m_P \mathbin{/\!/} l_P$，且 m_P 位于 P 与 l_P 的中间[1]。

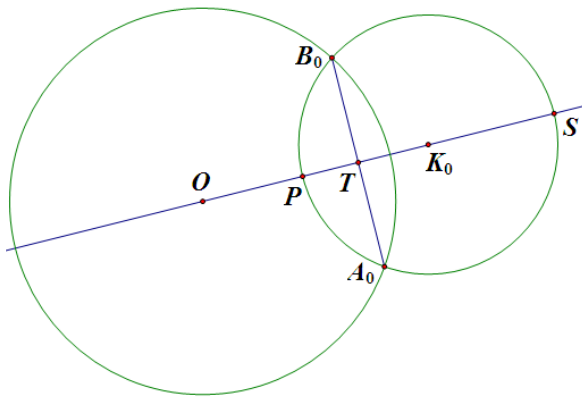

图 5

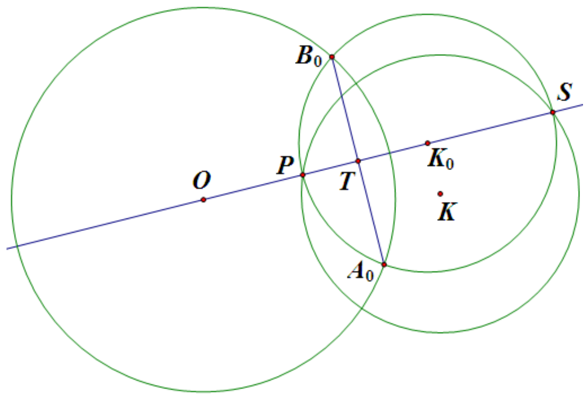

图 6

证明 先取定过 P 且与 $\odot O$ 正交的 $\odot K_0$，并且 K_0 在直线 OP 上。设 $\odot O$ 与 $\odot K_0$ 交于 A_0, B_0，连结 A_0B_0，直线 OP 与 $\odot K_0$ 的另一交点为 S，与 A_0B_0 交于 T，如图 5。

现在，再任取另一个过 P 且与 $\odot O$ 正交的 $\odot K$，如图 6。

因为 $\odot O$ 与 $\odot K_0, \odot K$ 都正交，由定理 5 知 O 在 $\odot K_0, \odot K$ 的根轴上，又因为此根轴过 P，所以此根轴其实就是 OP，亦即 $\odot K$ 恒过 S，因此 K 的轨迹 m_P 为 PS 的中垂线。

现在计算 O 到 m_P 的距离，即 OK_0，设 $\odot K_0$ 的半径为 r_0，则由定理 3 知 $r_0^2 + R^2 = (r_0 + OP)^2$，解得

$$r_0 = \frac{R^2 - OP^2}{2OP},$$

故

$$OK_0 = OP + r_0 = \frac{R^2 + OP^2}{2OP} = \frac{1}{2}\left(OP + \frac{R^2}{OP}\right),$$

注意到由定理 6 知 R^2/OP 为 O 到 l_P 的距离，从而定理 7 得证。 □

定理 7 实际上也给出了作过 P 的正交圆的作图法，如图 7 及图 8。

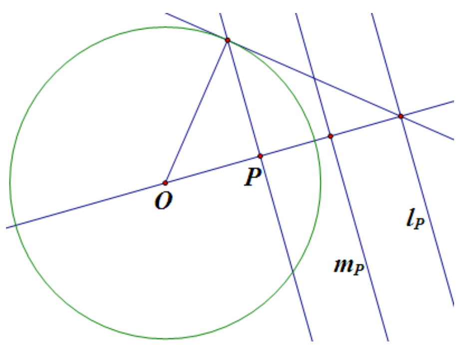

图 7

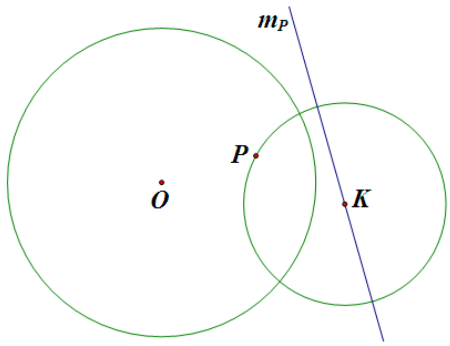

图 8

下面再考虑两个作图问题，它们相当于作平行线和垂线。

已知 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 正交，$\odot O_1$ 内有一定点 P。

（1）若 $O_1P \not\perp O_1O_2$，求作 $\odot O_3$，满足 $\odot O_3$ 与 $\odot O_1$ 正交，过点 P，且 O_3 在直线 O_1O_2 上。

（2）若 P 不在直线 O_1O_2 上，求作 $\odot O_3$，满足 $\odot O_3$ 与 $\odot O_1, \odot O_2$ 都正交，且过点 P。

[1]中间的意思就是 P 与 m_P 的距离等于 m_P 与 l_P 的距离

解 （1）先作 P 关于 $\odot O_1$ 的 m_P，由于 $O_1P \nparallel O_1O_2$，则 m_P 与 O_1O_2 必有交点，此交点就为所求的 O_3，如图 9；

（2）先作 P 关于 $\odot O_1$ 的 m_P，再作 O_1, O_2 的公共弦，由于 P 不在直线 O_1O_2 上，则 m_P 与此公共弦必有交点，此交点就为所求的 O_3，如图 10。 □

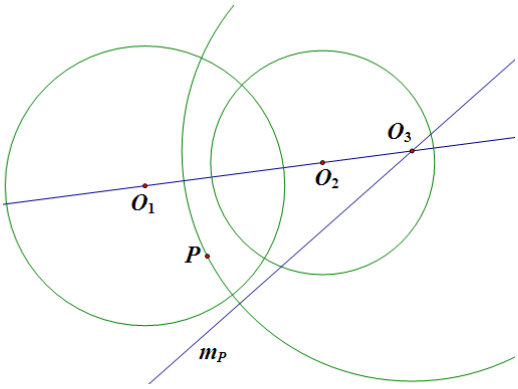

图 9

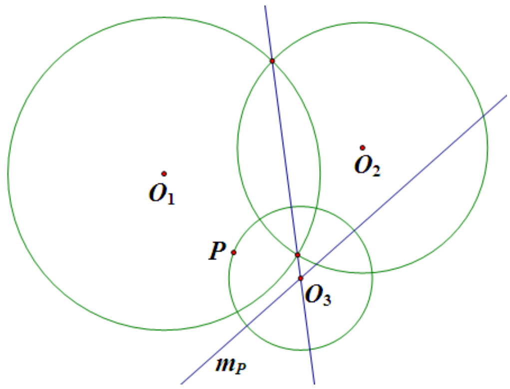

图 10

好了，现在可以回过头来看原题目了。

由推论 5.1 知选项 B 错；

由推论 5.2 知选项 C 错；

由图 10 的作图法知 A 错；

由图 9 的作图法及定理 4 知 D 正确。

注：这里还应该考虑“双曲直线”还可以是圆的直径这个特殊情况，不过都是很容易判断的，并不影响答案，这里就不再细说了。