$$=\frac{1}{2}\left[\frac{(a-b)(a-c)}{(a+b)(a+c)}+\frac{(b-c)(b-a)}{(b+c)(b+a)}+\frac{(c-a)(c-b)}{(c+a)(c+b)}\right].$$

所以所证等价于$\sum\frac{a}{b+c}-\frac{3}{2}\geq\frac{1}{2}-\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.即

$$\sum\frac{a}{b+c}+\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 2$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^3+b^3+c^3+5abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 1$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+5abc\geq(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+5abc\geq\sum ab(a+b)+2abc$$

$$\Leftrightarrow\sum a^3-\sum ab(a+b)+3abc\geq 0\Leftrightarrow\sum a(a-b)(a-c)\geq 0.$$

由 Schur 不等式知最后一式显然成立.

推论 6 设 a、b、c 是正实数，则有

$$\frac{a^3+b^3+c^3+3abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}+\frac{(a+b+c)^2}{6(a^2+b^2+c^2)}\geq\frac{5}{4}. \tag{17}$$

证明 由推论 5 的证明有

$$\frac{1}{2}\sum\frac{a}{b+c}+\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 1. \tag{18}$$

由推论 1 有

$$\frac{1}{2}\sum\frac{a}{b+c}+\frac{(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\geq\frac{13}{12}. \tag{19}$$

（18）、（19）式相加即得.

参考文献

[1]杨学枝.数学奥林匹克不等式研究[M].哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2009，8.

两个根式不等式的推广

李明 [1], 严文兰 [2]
1.中国医科大学数学教研室 110001　　2.广东省河源市连平县忠信中学　517139

文[1]得到了如下根式不等式：

$$\underbrace{\sqrt{a+\lambda\cdot\sqrt{a+\cdots+\lambda\cdot\sqrt{a}}}}_{n\text{个根号}}<\sqrt{a+\frac{\lambda^2}{4}}+\frac{\lambda}{2}, \qquad ①$$

其中, $2\leq n\in N$, $\lambda>0$, $a>0$.

文[2]给出了如下根式不等式：

$$\sqrt{k\sqrt{(k+1)\cdots\sqrt{n}}}<k+1, \qquad ②$$

其中, $2\leq k\leq n-1$, $k,n\in N$.

笔者发现不等式①和②可相应推广成如下不等式③和④:

$$\sqrt{a_1+\lambda\cdot\sqrt{a_2+\cdots+\lambda\cdot\sqrt{a_n}}}<\sqrt{a_2+\frac{\lambda^2}{4}}+\frac{\lambda}{2}\,, \tag{③}$$

其中, $2\le n\in N$, $\lambda>0$, $\{a_n\}$ 是正项等差数列且满足公差 $d\ge 0$.

$$\sqrt[m]{a_1\cdot\sqrt[m]{a_2\cdots\sqrt[m]{a_n}}}<\left(a_1+\frac{d}{m-1}\right)^{\frac{1}{m-1}}, \tag{④}$$

其中, $2\le n,m\in N$, $\{a_n\}$ 是正项等差数列且满足公差 $d\ge 0$ 和末项 $a_n>1$.

不等式③和④均可用数学归纳法来证明. 下面先给出**不等式③的证明:**

记 $x_k=\sqrt{a_k+\lambda\cdot\sqrt{a_{k+1}+\cdots+\lambda\cdot\sqrt{a_n}}}$ $(1\le k\le n-1)$. 于是, 欲证 $x_{n-1}<\sqrt{a_n+\frac{\lambda^2}{4}}+\frac{\lambda}{2}$, 两边平方等价于证明

$$a_{n-1}+\lambda\sqrt{a_n}<a_n+\lambda\sqrt{a_n+\frac{\lambda^2}{4}}+\frac{\lambda^2}{2},$$

即证 $\sqrt{a_n}<\sqrt{a_n+\frac{\lambda^2}{4}}+\frac{\lambda}{2}+\frac{d}{\lambda}$, 显然成立.

假设 $x_k<\sqrt{a_{k+1}+\frac{\lambda^2}{4}}+\frac{\lambda}{2}$ 成立, 则

$$x_{k-1}=\sqrt{a_{k-1}+\lambda x_k}<\sqrt{a_{k-1}+\lambda\left(\sqrt{a_{k+1}+\frac{\lambda^2}{4}}+\frac{\lambda}{2}\right)}.$$

于是, 欲证 $x_{k-1}<\sqrt{a_k+\frac{\lambda^2}{4}}+\frac{\lambda}{2}$, 只需证

$$\sqrt{a_{k-1}+\lambda\left(\sqrt{a_{k+1}+\frac{\lambda^2}{4}}+\frac{\lambda}{2}\right)}\le\sqrt{a_k+\frac{\lambda^2}{4}}+\frac{\lambda}{2},$$

两边平方并化简等价于证明

$$a_{k-1}+\lambda\sqrt{a_{k+1}+\frac{\lambda^2}{4}}\le a_k+\lambda\sqrt{a_k+\frac{\lambda^2}{4}}\,,$$

即证 $\lambda\sqrt{a_k+d+\frac{\lambda^2}{4}}\le d+\lambda\sqrt{a_k+\frac{\lambda^2}{4}}$, 两边平方并化简等价于证明

$$\lambda^2 d\le d^2+2\lambda d\sqrt{a_k+\frac{\lambda^2}{4}}.$$

显然成立.

综上, 由数学归纳法可得不等式③成立.

仿照不等式③的证明过程, 再来给出**不等式④的证明:**

记 $y_k=\sqrt[m]{a_k\cdot\sqrt[m]{a_{k+1}\cdots\sqrt[m]{a_n}}}$ ($1\le k\le n$). 于是, 欲证 $y_n<\left(a_n+\frac{d}{m-1}\right)^{\frac{1}{m-1}}$, 等价于证明 $\left(a_n+\frac{d}{m-1}\right)^m>a_n^{m-1}$. 由于 $2\le m\in N, d\ge 0, a_n>1$, 于是 $\left(a_n+\frac{d}{m-1}\right)^m\ge a_n^m>a_n^{m-1}$.

假设 $y_k<\left(a_k+\frac{d}{m-1}\right)^{\frac{1}{m-1}}$ 成立, 则

$$y_{k-1}=\sqrt[m]{a_{k-1}y_k}<\sqrt[m]{a_{k-1}\left(a_k+\frac{d}{m-1}\right)^{\frac{1}{m-1}}}\;.$$

于是, 欲证 $y_{k-1} < \left(a_{k-1}+\frac{d}{m-1}\right)^{\frac{1}{m-1}}$, 只需证

$$\sqrt[m]{a_{k-1}\left(a_k+\frac{d}{m-1}\right)^{\frac{1}{m-1}}} \le \left(a_{k-1}+\frac{d}{m-1}\right)^{\frac{1}{m-1}},$$

即证 $a_{k-1}^{m-1}\left(a_k+\frac{d}{m-1}\right) \le \left(a_{k-1}+\frac{d}{m-1}\right)^m$. 由二项式展开定理可得

$$\left(a_{k-1}+\frac{d}{m-1}\right)^m \ge a_{k-1}^m + m a_{k-1}^{m-1}\frac{d}{m-1} = a_{k-1}^{m-1}(a_{k-1}+d+\frac{d}{m-1}) = a_{k-1}^{m-1}(a_k+\frac{d}{m-1}).$$

综上, 由数学归纳法可得不等式④成立.

最后, 对于不等式③和④, 笔者各给出一个简洁优美的特例供读者欣赏, 即如下的不等式⑤和⑥

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}} < 2 \ (n \in N^*), \quad ⑤$$

$$\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[3]{4\cdots\sqrt[3]{2n}}} < \sqrt{3}, \ (n \in N^*), \quad ⑥$$

特别地, 对于不等式⑤还可以给出另外一个巧妙的证明如下:

证明

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}} < \sqrt{1+\sqrt{4+\cdots+\sqrt{4^{n-2}+\sqrt{4^{n-1}}}}}$$

$$< \sqrt{1+\sqrt{4+\cdots+\sqrt{4^{n-2}+\sqrt{4^{n-1}+1}}}} = 2.$$

参考文献

[1]李明.一个二次连根式不等式的推广[J].不等式研究通讯，2011,1.
[2]匡继昌.常用不等式(第四版)[M].济南：山东科学技术出版社,2010.8:107.

几何、调和平均组合的最佳广义对数平均界

钱伟茂
湖州广播电视大学，浙江 湖州，313000

摘要： 对于 $p \in \mathbb{R}$, 两个正数 a,b 的广义对数平均 $L_p(a,b)$，几何平均 $G(a,b)$ 和调和平均 $H(a,b)$ 分别定义为：

$$L_p(a,b)=\begin{cases} a, & a=b, \\ \left[\dfrac{a^{p+1}-b^{p+1}}{(p+1)(a-b)}\right]^{1/p}, & p\ne 0, p\ne -1, a\ne b, \\ \dfrac{1}{e}\left(\dfrac{b^b}{a^a}\right)^{1/(a-b)}, & p=0, a\ne b, \\ \dfrac{b-a}{\ln b-\ln a}, & p=-1, a\ne b, \end{cases}$$

$G(a,b)=\sqrt{ab}$ 和 $H(a,b)=\frac{2ab}{a+b}$。本文我们解决了如下问题：对于 $\alpha\in(0,1)$，使双向不等式 $L_p(a,b)\le G^{\alpha}(a,b)H^{1-\alpha}(a,b)\le L_q(a,b)$ 对所有的 $a,b>0$ 成立的最大 p 和最小 q 分