关于方程 $a^x = \log_a x$ 解的讨论

杨明燕[1]，**朱正元**[2]，**陈伟候**[3]

(1. 北京联合大学基础部，北京　10000；2. 中央民族大学，北京　100081；
3. 中国农业大学基础科技学院，北京　100094)

摘　要：本文采用将两条曲线 $y = a^x$ 与 $y = \log_a x$ 的交点坐标和底数分别表示成参数 k (k 是直线斜率) 的函数的方法，系统讨论了方程 $a^x = \log_a x$ 有解的各种充分条件. 对于改进高等数学教学具有一定的现实意义.

关键词：指数函数；对数函数；幂级数

中图分类号：O151　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1005-8036(2002)02-0122-06

1　引　　言

对于方程 $a^x = \log_a x$，由于等式两端的函数图形关于直线 $y = x$ 对称，往往使人容易根据直观断言，当 $a > 1$ 时，$a^x = \log_a x$ 无解；当 $0 < a < 1$ 时，$a^x = \log_a x$ 有一个解. 但遗憾的是，直观与本质发生了矛盾，上述断言的第二部分并不正确.

考察曲线 $y = (\frac{1}{16})^x$ 与 $y = \log_{\frac{1}{16}} x$，显然点 $P_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ 和点 $P_2(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ 都是它们的交点. 我们引入迭代公式①

$$x_{n+1} = \log_{\frac{1}{16}} x_n$$

求得第三个交点 $P_3(0.36\,4249\cdots, 0.364249\cdots)$. 因此，可以断定，当 $a = \frac{1}{16}$ 时，方程 $a^x = \log_a x$ 至少有三个解. 不难求得

$$0.330482\cdots = \log_{\frac{1}{16}} \frac{2}{5} > (\frac{1}{16})^{\frac{2}{5}} = 0.329876\cdots$$

进一步猜测有下列不等式：

$$\log_{\frac{1}{16}} x > (\frac{1}{16})^x, \text{当 } a < x < \frac{1}{2};$$

$$\log_{\frac{1}{16}} x < (\frac{1}{16})^x, \text{当 } \frac{1}{4} < x < a.$$

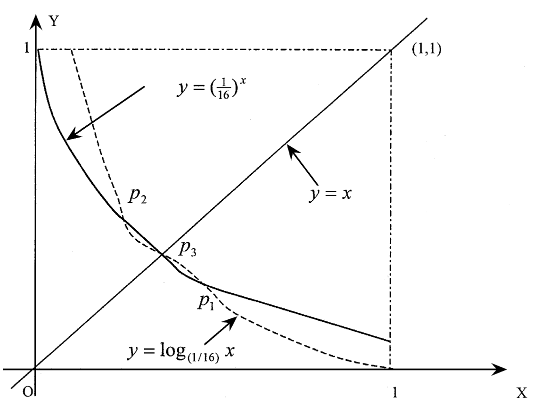

图 1

收稿日期：2001-09-20
作者简介：杨明燕(1964 -)，女(汉族)，北京人，北京联合大学基础部讲师.

①若利用 $x_{n+1} = (\frac{1}{16})^{x_n}$ 进行迭代，其过程是发散的.

其中 ,α 是 $x = (\frac{1}{16})^x$ 的实根.

在此 ,我们作了图示 1 ,这有助于想象两条曲线相交的细节.

现将问题一般化 ,对于满足 $0 < a < 1$ 的实数参数 a 进行分类 ,讨论每一类中方程 $a^x = \log_a x$ 解的情形.

2　结果与证明

文献[1]给出了 Waksmann 在 1990 年所作的结果 :1 若 $0 < a < e^{-e}$,则方程 $a^x = \log_a x$ 有三个解 ;2 若 $e^{-e} < a < 1$,则方程 $a^x = \log_a x$ 有一个解 ;3 若 $a = e^{-e}$,则曲线 $y = a^x$ 与曲线 $y = \log_a x$ 仅有一个交点 (e^{-1}, e^{-1}) ,并且也是两曲线的公切点.

本文将以过原点和两曲线交点的直线斜率 k 为参数 ,把交点坐标及底数 a 均表示成 k 的函数 ,由此推导出包含上述三个结论的五条性质.

显然 ,当 $0 < a < 1$ 时 ,两曲线必有交点在 $y = x$ 上 ,又因交点只能位于以 (0 ,0) ,(0 ,1) ,(1 ,1) 和 (1 ,0) 为顶点的正方形内 ,且关于 $y = x$ 对称 ,交点只能为奇数个.

不失一般性 ,我们从位于区域 $R = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1, y < x\}$ 内的交点 (x, y) 开始分析. 显然 ,交点坐标 x, y 和底数 a 应满足下列四个关系 :

(1)　$y = \log_a x$;

(2)　$y = a^x$;

(3)　$0 < a < 1$;

(4)　$x > y$.

从 (1) 式和 (2) 式 ,推导出

(5)　$\frac{y}{x} = a^{x-y}$.

从 (4) 式导出 $x - y > 0$,又已知 $x > 0, y > 0$,我们就可导出

(6)　$a = (\frac{y}{x})^{\frac{1}{x-y}}$.

从 (6) 式 ,(1) 式和 (2) 式 ,我们导出

(7)　$x = a^y = (\frac{y}{x})^{\frac{y}{x-y}}$;

(8)　$y = a^x = (\frac{y}{x})^{\frac{x}{x-y}}$.

假设过此交点与原点的直线斜率为 k ,显然 $0 < k < 1$. 因而 ,对交点 (x, y) 而言 ,我们有 $y = kx$,将这一等式代入 (7) ,(8) 和 (6) 式 ,我们就导出了 :

(9)　$x = x(k) = k^{\frac{k}{1-k}}, k \in (0, 1)$;

(10)　$y = y(k) = k^{\frac{1}{1-k}}, k \in (0, 1)$;

(11)　$a = a(k) = k^{\frac{1}{1-k} \cdot k^{\frac{-k}{1-k}}}, k \in (0, 1)$.

容易验证 ,对每一 $k \in (0, 1)$,$x(k)$,$y(k)$ 和 $a(k)$ 都是正数 ,并且满足关系式 (1) ,(2) 和 (4) ,后面证明的 (17) 表明 ,关系式 (3) 也成立.

下面是上述三个函数对 k 的一阶导数:

(12) $\frac{dx}{dk} = k^{\frac{k}{1-k}} \cdot \frac{lnk + 1 - k}{(1-k)^2}$;

(13) $\frac{dy}{dk} = k^{\frac{1}{1-k}} \cdot \frac{klnk + 1 - k}{k(1-k)^2}$;

(14) $\frac{da}{dk} = k^{\frac{1}{1-k}} \cdot k^{\frac{-k}{1-k}} + \frac{-k}{1-k} \cdot \frac{(1-k)^2 - k(lnk)^2}{k(1-k)^3}$.

利用 Hôpital 法则容易证明:

(15) $\lim\limits_{k\to 0^+} x(k) = 1$, $\lim\limits_{k\to 1^-} x(k) = e^{-1}$;

(16) $\lim\limits_{k\to 0^+} y(k) = 0$, $\lim\limits_{k\to 1^-} y(k) = e^{-1}$;

(17) $\lim\limits_{k\to 0^+} a(k) = 0$, $\lim\limits_{k\to 1^-} a(k) = e^{-e}$;

利用 $\ln(1-x)$ 的幂级数展开式,我们得

$$\begin{aligned}\ln k &= \ln(1-(1-k)) \\ &= -[(1-k) + \frac{1}{2}(1-k)^2 + \cdots + \frac{1}{n}(1-k)^n + \cdots],\end{aligned}$$

此处 $-1 \leq 1-k < 1$,即 $0 < k \leq 2$.

注意到问题中的 $k \in (0,1)$,就有 $1-k > 0$,因此

$$\begin{aligned}\ln k &= -[(1-k) + \frac{1}{2}(1-k)^2 + \cdots + \frac{1}{n}(1-k)^n + \cdots] \\ &> -[(1-k) + (1-k)^2 + \cdots + (1-k)^n + \cdots] \\ &= \frac{k-1}{k}.\end{aligned}$$

由此易推出下列两式:

(18) $\frac{dx}{dk} = k^{\frac{k}{1-k}} \cdot \frac{\ln k + 1 - k}{(1-k)^2} < 0, k \in (0,1)$;

(19) $\frac{dy}{dk} = k^{\frac{1}{1-k}} \cdot \frac{k\ln k + 1 - k}{k(1-k)^2} > 0, k \in (0,1)$.

利用幂级数展开式,我们还可以得

$$\begin{aligned}(\ln k)^2 &= \{\ln[1-(1-k)]\}^2 \\ &= (1-k)^2 + [\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 1}](1-k)^3 \\ &\quad + [\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 1}](1-k)^4 \\ &\quad + [\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 1}](1-k)^5 \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + [\frac{1}{1\cdot(n-1)} + \frac{1}{2\cdot(n-2)} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\cdot 1}](1-k)^n \\ &\quad + \cdots \\ &< (1-k)^2 + (1-k)^3 + \cdots + (1-k)^n + \cdots\end{aligned}$$

$$= \frac{(1-k)^2}{k},$$

此处$|1-k| < 1$,即$0 < k < 2$. 因此,当$0 < k < 1$时,就有

$$(1-k)^2 - k(\ln k)^2 > 0,$$

就得到

(20) $\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}k} > 0, k \in (0,1)$.

有了前面这些准备,我们导出以下性质.

性质 1　对每一个 $a \in (0,1)$, $y = a^x$ 与 $y = \log_a x$ 这两条曲线恰有一个交点在直线 $y = x$ 上.

证明　先从交点(x, x)出发,将底数 a 看作 x 的函数. 即对每一 $x \in (0,1)$,

$$x = a^x \Rightarrow \ln x = x \cdot \ln a$$

$$\Rightarrow a = e^{\frac{\ln x}{x}},$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x} = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \frac{1-\ln x}{x^2} > 0.$$

因此, a 是 x 的在$(0,1)$上的递增函数. 而

$$\lim_{x \to 0^+} a = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} = 0,$$

$$\lim_{x \to 1^-} a = \lim_{x \to 1^-} e^{\frac{\ln x}{x}} = 1.$$

这样,函数 $a = e^{\frac{\ln x}{x}}$ 表示了从 $0 < x < 1$ 到 $0 < a < 1$ 的一一对应. 因此,对每一个 $a \in (0,1)$,曲线 $y = a^x$ 与曲线 $y = \log_a x$ 恰有一个交点在直线 $y = x$ 上.

性质 2　对每一个 $a \in (0,1)$而言,曲线 $y = a^x$ 与 $y = \log_a x$ 至少有一个交点,至多有三个交点.

证明　根据性质 1,问题转化为,在区域 $R = \{(x, y) | 0 < x < 1, 0 < y < 1, y < x\}$内,两曲线至多有一个交点. 用反证法,设在区域 R 内有两不同交点$(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$,令 $k_1 = y_1/x_1$, $k_2 = y_2/x_2$.

若 $k_1 = k_2 = k$,由(9),(10)和(11)的推导过程可知, $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$,这与$(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$矛盾.

若 $k_1 \neq k_2$,由表达式(11)可知,底数 a 是斜率 k 的函数,并且 $a = a(k_1) = a(k_2)$. 引用罗尔(Rolle)中值定理,有

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}k}\Big|_{k=c} = 0, \text{点 } C \text{ 位于 } k_1 \text{ 和 } k_2 \text{ 之间}.$$

但由(20)式,在 $c \in (0,1)$时, $\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}k}\Big|_{k=c} > 0$,这是矛盾.

性质 3　曲线 $y = a^x$ 与 $y = \log_a x$ 有三个交点的充分必要条件是. 底数 a 满足 $0 < a < e^{-e}$.

证明　若有三个交点,则在区域 $R = \{(x, y) | 0 < x < 1, 0 < y < 1, y < x\}$内恰有一个. 由这个交点求得惟一的 k. 再由(11),(17)和(20)式,可断定 $0 < a < e^{-e}$.

若 $0 < a < e^{-e}$,由函数 $a(k)$的单调性,可求得惟一的 $k \in (0,1)$,使 $a = a(k)$. 将 k 代入(9)和(10),求得 $x = x(k)$, $y = y(k)$. 易验证 x, y 和 a 满足关系式(1),(2),(3),(4),因此$(x,$

y)是位于 R 内的惟一交点.

由交点关于 $y = x$ 直线的对称性,再加上位于直线 $y = x$ 上的交点,恰为三个交点.

性质 4 当且仅当两曲线交点为(e^{-1}, e^{-1})时,曲线 $y = a^x$ 与曲线 $y = \log_a x$ 在交点有公切线.

证明 设交点为(e^{-1}, e^{-1}),易求得相应的底数 $a = e^{-e}$. 容易验证,两曲线在交点处的切线斜率都是 -1. 因此,两曲线在交点处有公切线.

反过来,若两曲线在交点(x_0, y_0)处有公切线,这个交点有两种可能的位置:一是位于区域 $R = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1, y < x\}$内;另一是位于直线 $y = x$ 上.

若交点(x_0, y_0)位于区域 R 内,记它所对应的斜率为 k_0. 对曲线 $y = a^x$ 而言,

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} = a^{x_0}\ln a = y(k_0) \cdot \ln a(k_0)$$

$$= k_0^{\frac{1}{1-k_0}} \cdot \ln\left(k_0^{\frac{1}{1-k_0}} \cdot k_0^{\frac{-k_0}{1-k_0}}\right)$$

$$= k_0^{\frac{1}{1-k_0}} \cdot \frac{1}{1-k_0} \cdot k_0^{\frac{-k_0}{1-k_0}} \cdot \ln k_0$$

$$= \frac{k_0}{1-k_0} \cdot \ln k_0$$

对曲线 $y = \log_a x$ 而言,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x_0} = \frac{1}{x_0 \ln a} = \frac{1}{x(k_0) \cdot \ln a(k_0)}$$

$$= k_0^{\frac{-k_0}{1-k_0}} \cdot \left[\ln\left(k_0^{\frac{1}{1-k_0}} \cdot k_0^{\frac{-k_0}{1-k_0}}\right)\right]^{-1}$$

$$= \frac{1-k_0}{\ln k_0}.$$

在交点处若有公切线,则上面两斜率相等,因此有

$$(1-k_0)^2 - k_0(\ln k_0)^2 = 0.$$

但前面已证明,当 $k \in (0,1)$时,有不等式

$$(1-k)^2 - k(\ln k)^2 > 0,$$

因此,在 R 内的交点不可能有公切线.

若交点(x_0, y_0)位于直线 $y = x$ 上,则有

$$x_0 = a^{x_0} \text{ 和 } x_0 = \log_a x_0.$$

对曲线 $y = a^x$,有

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} = a^{x_0}\ln a = x_0 \ln a.$$

对曲线 $y = \log_a x$,有

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} = \frac{1}{x_0 \ln a}.$$

在点(x_0, y_0)有公切线,就导出

$$(x_0 \ln a)^2 = 1.$$

由于 $x_0 >$,$\ln a < 0$,因此只能有

$$x_0 \ln a = -1.$$

这样,我们得

$$x_0 = y_0 = a^{x_0} = a^{\frac{-1}{\ln a}} = e^{\frac{-1}{\ln a}\cdot \ln a} = e^{-1},$$

$$\ln a = \frac{-1}{x_0} = -e,$$

$$a = e^{-e}.$$

容易验证,(e^{-1}, e^{-1})确是有公切线的交点.

性质5 对 $k \in (0,1)$,有恒等式

$$k^{\frac{1}{1-k}\cdot k^{\frac{-k}{1-k}}} = k^{\frac{k}{1-k}\cdot k^{\frac{-1}{1-k}}}.$$

证明:

$$\frac{-k}{1-k} = 1 + \frac{-1}{1-k}$$

$$\Rightarrow k^{\frac{-k}{1-k}} = k^{1+\frac{-1}{1-k}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-k}\cdot k^{\frac{-k}{1-k}} = \frac{k}{1-k}\cdot k^{\frac{-1}{1-k}}$$

$$\Rightarrow k^{\frac{1}{1-k}\cdot k^{\frac{-k}{1-k}}} = k^{\frac{k}{1-k}\cdot k^{\frac{-1}{1-k}}}.$$

综合性质1到性质4,我们断定:(i)对于 $k < a < e^{-e}$,方程 $a^x = \log_a x$ 恰有三个解,(ii)对于 $e^{-e} < a < 1$,方程 $a^x = \log_a x$ 恰有一个解;(iii)对于 $a = e^{-e}$,曲线 $y = a^x$ 与曲线 $y = \log_a x$ 恰有一个交点(e^{-1}, e^{-1}),并且也是公切点.

参考文献:

[1] EISENBERG T. ,On Torpedoes and Non-Intuitive Problems ,[J]. **Teaching Mathematics and its Applications**, 2000 ,19(2) :98 - 100.

[2] 数学手册编写组,数学手册[M].北京:人民教育出版社,1979.

Discussion About solution of Equation $a^x = \log_a x$

YANG Ming-yan[1] ,ZHU Zheng-yuan[2] ,CHEN Wei-hou[3]

(1. *Mathematics Unit* , *Beijing Union university* , *Beijing* 100000 , *China* ;

2. *Department of Mathematics* , *central University for Nationalities* , *Beijing* 100081 , *China* ;

3. *Mathematics Unit* , *Chines Agriculture University* (*West*) , *Beijing* 100094 , *China*)

Abstract: How many solutions are there for the equation $a^x = \log_a x$? By means of the slope k of the straight line y = kx ,we obtain repress entation of x(k) ,y(k) and a(k) ,then it turns out that : (i) for 0 < a < e^{-e} the equation has exactly three solutions ; (ii) for e^{-e} < a < 1 there is only one solution ,and (iii) for a = e^{-e} ,the two curves are tangent to one another ,so for this value of x there is also a single root on the line y = x.

Keywords: exponential function ; logarithmic function ; power series