

双曲线与 $y = px + q/x$ 互换

kuing

2016 年 4 月 21 日

之前在 <http://kuing.orzweb.net/viewthread.php?tid=2486> 里已经扯过一下，但不够详细，也没给出具体表达式。今天在某群里又聊起相关东东，有人问起有没有相关资料，闲来无事，不如就即场写个升级版吧。为方便叙述，本文中的 a, b 默认为正数。

引理 曲线 $F(x, y) = 0$ 绕原点逆时针旋转 θ 角后的曲线为 $F(x \cos \theta + y \sin \theta, y \cos \theta - x \sin \theta) = 0$ 。

引理的证明从略。

定理 任意标准方程双曲线可绕原点旋转变成形如 $y = px + q/x$ ($q \neq 0$) 的函数。

证明 设双曲线方程为 $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ ，则绕原点逆时针旋转 θ 角后变为

$$\frac{(x \cos \theta + y \sin \theta)^2}{a^2} - \frac{(y \cos \theta - x \sin \theta)^2}{b^2} = 1,$$

即

$$\left(\frac{\cos^2 \theta}{a^2} - \frac{\sin^2 \theta}{b^2}\right)x^2 + \sin 2\theta \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)xy + \left(\frac{\sin^2 \theta}{a^2} - \frac{\cos^2 \theta}{b^2}\right)y^2 = 1,$$

取 $\theta = \arctan(a/b)$ ，则

$$\sin^2 \theta = \frac{a^2}{a^2 + b^2},$$

$$\cos^2 \theta = \frac{b^2}{a^2 + b^2},$$

$$\sin 2\theta = \frac{2ab}{a^2 + b^2},$$

代入方程中化为

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)x^2 + \frac{2}{ab}xy = 1,$$

显然 $x \neq 0$ ，故上式可整理为

$$y = \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)\frac{x}{2} + \frac{ab}{2x},$$

即得证。 □

另外，也可以取 $\theta = -\arctan(a/b)$ ，此时的 $\sin 2\theta$ 变成 $-2ab/(a^2 + b^2)$ ，其余一样，旋转出来的函数为

$$y = -\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)\frac{x}{2} - \frac{ab}{2x}.$$

根据这两个式子，我们可以反过来推出上述定理的逆定理。

定理' 任意形如 $y = px + q/x$ ($q \neq 0$) 的函数都可由标准方程双曲线绕原点旋转而来。

证法一 易知无论 ab 为何值, a/b 的取值范围都为 \mathbb{R}^+ , 则 $a/b - b/a$ 能取遍 \mathbb{R} , 所以, 当 $q > 0$ 时, 存在 a, b 满足 $a/b - b/a = 2p$ 且 $ab = 2q$, 当 $q < 0$ 时, 存在 a, b 满足 $a/b - b/a = -2p$ 且 $ab = -2q$, 根据上述结论即知 $y = px + q/x$ ($q \neq 0$) 都可由标准方程双曲线绕原点旋转而来。□

当然, 也可以再次运用旋转公式来证, 甚至得出具体表达式。

证法二 将 $y = px + q/x$ 去分母为 $px^2 - xy + q = 0$, 则绕原点逆时针旋转 θ 角后变为

$$\begin{aligned} & p(x \cos \theta + y \sin \theta)^2 - (x \cos \theta + y \sin \theta)(y \cos \theta - x \sin \theta) + q = 0 \\ \iff & (p \cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta)x^2 + (p \sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta)y^2 + (p \sin 2\theta - \cos 2\theta)xy + q = 0 \\ \iff & (p + p \cos 2\theta + \sin 2\theta)x^2 + (p - p \cos 2\theta - \sin 2\theta)y^2 + 2(p \sin 2\theta - \cos 2\theta)xy + 2q = 0, \end{aligned}$$

取

$$\theta = \frac{1}{2} \arccos \frac{p}{\sqrt{1+p^2}},$$

则

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \\ \sin 2\theta &= \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}, \end{aligned}$$

代入方程中化简为

$$(p + \sqrt{p^2 + 1})x^2 + (p - \sqrt{p^2 + 1})y^2 + 2q = 0,$$

于是由 $q \neq 0$ 且 $(p + \sqrt{p^2 + 1})(p - \sqrt{p^2 + 1}) = -1$ 可知上式必为双曲线, 即得证。□

这两个定理表明函数 $y = px + q/x$ ($q \neq 0$) 一定为双曲线, 并且任何形状的双曲线都可由它构造出来。