题目： $x>1$时，求 $f(x)=\dfrac{\sqrt{5x^2-x}}{4-x}+\dfrac{\sqrt{x^2+4x}}{3+x}$ 的最值

解析 1：**换元+凸函数**

$$f(x)=\frac{\sqrt{5x^2-x}}{4-x}+\frac{\sqrt{x^2+4x}}{3+x}=\sqrt{\frac{x}{4-x}+\frac{x^2}{(4-x)^2}}+\sqrt{\frac{x}{3+x}+\frac{x^2}{(3+x)^2}}$$

换元一下令 $\dfrac{1}{m}=\dfrac{x}{4-x},\dfrac{1}{n}=\dfrac{x}{3+x},3<m<4,3<m<4$

则 $m+n=7$，

故 $f(x)$ 可转化为

求 $\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{m^2}}+\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}$ 的最值

注意到 $g(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$， $g''(x)=\dfrac{3x^2+12x+8}{4x^6\left(\dfrac{x+1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}>0$

则 $g(x)$ 是下凸函数

所以 $\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{m^2}}+\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}}{2}\geq 2\sqrt{\dfrac{1}{\dfrac{m+n}{2}}+\dfrac{1}{\left(\dfrac{m+n}{2}\right)^2}}=\dfrac{6\sqrt{2}}{7}$

解析 2：**换元+凸函数+切线法**

令 $x=\dfrac{1}{t}>1$将原函数的表达式进行一下凸性反转，则

$$f(x)=g(t)=\frac{\sqrt{5-t}}{4-t}+\frac{\sqrt{4+t}}{3+t}$$

$$\left(\frac{\sqrt{5-t}}{4-t}\right)'\Bigg|_{t=\frac{1}{2}}=\frac{6-t}{2\sqrt{5-t}(4-t)^2}\Bigg|_{t=\frac{1}{2}}=\frac{11\sqrt{2}}{3\times 49}$$

$\dfrac{\sqrt{5-t}}{4-t}$在 $t=\dfrac{1}{2}$处的切线方程： $\dfrac{\sqrt{5-t}}{4-t}\geq\dfrac{11\sqrt{2}}{3\times 49}(t-\dfrac{1}{2})+\dfrac{3\sqrt{2}}{7}$ ①

$$\left(\frac{\sqrt{4+t}}{3+t}\right)'\Bigg|_{t=\frac{1}{2}}=\frac{-t-5}{2\sqrt{4+t}(3+t)^2}\Bigg|_{t=\frac{1}{2}}=-\frac{11\sqrt{2}}{3\times 49}$$

$\dfrac{\sqrt{4+t}}{3+t}$ 在 $t=\dfrac{1}{2}$ 处的切线方程：$\dfrac{\sqrt{4+t}}{3+t} \geq -\dfrac{11\sqrt{2}}{3\times 49}(t-\dfrac{1}{2})+\dfrac{3\sqrt{2}}{7}$ ②

①+②得：$\dfrac{\sqrt{5-t}}{4-t}+\dfrac{\sqrt{4+t}}{3+t} \geq \dfrac{6\sqrt{2}}{7}$

解析 3：**三角形不等式+均值不等式**

令 $a=\dfrac{x}{4-x}, b=\dfrac{x}{3+x}$ 则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=7$ 则 $7=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} \geq \dfrac{2}{\sqrt{ab}}$ 故 $\sqrt{ab} \geq \dfrac{2}{7}$

则 $f(x)=\dfrac{\sqrt{5x^2-x}}{4-x}+\dfrac{\sqrt{x^2+4x}}{3+x}=\sqrt{a+a^2}+\sqrt{b+b^2}$

$\geq \sqrt{(a+b)^2+(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$ （三角形不等式）

$\geq \sqrt{4ab+4\sqrt{ab}} \geq \dfrac{6\sqrt{2}}{7}$

注：补充三角形不等式：

$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$