关于共点向量分割三角形面积的四个结论

郑　金

(辽宁省凌源市职教中心，122500)

在三角形平面内任取一点，从该点到三个顶点的连线对应三个向量，其中每两个向量与三角形的一条边可构成一个三角形. 若规定每个向量所对的三角形是指另外两个向量所在的三角形，那么各向量所对的三角形的面积与三个共点向量之间满足什么关系呢? 下面归纳四个结论并证明之.

结论 1　对于 $\triangle ABC$ 内的任一点 P，若 $\triangle PBC$、$\triangle PCA$、$\triangle PAB$ 的面积分别为 S_A、S_B、S_C，则 $S_A\cdot\overrightarrow{PA}+S_B\cdot\overrightarrow{PB}+S_C\cdot\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$.

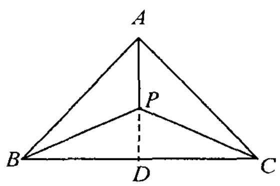

图 1

即三角形内共点向量的线性加权和为零，权系数分别为向量所对的三角形的面积.

证明 1　如图 1 所示，可知 $\frac{BD}{DC}=\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle PAC}}=\frac{S_C}{S_B}$，所以 $\overrightarrow{BD}=\frac{S_C}{S_B}\overrightarrow{DC}$. 即 $\overrightarrow{PD}-\overrightarrow{PB}=\frac{S_C}{S_B}(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PD})$，整理得

$$\overrightarrow{PD}=\frac{S_B}{S_B+S_C}\overrightarrow{PB}+\frac{S_C}{S_B+S_C}\overrightarrow{PC} \qquad ①$$

又 $\frac{AP}{PD}=\frac{S_C}{S_{\triangle PDB}}=\frac{S_B}{S_{\triangle PDC}}$，由合比定理知 $\frac{AP}{PD}=\frac{S_B+S_C}{S_{\triangle PDB}+S_{\triangle PDC}}=\frac{S_B+S_C}{S_A}$. 因此

$$\overrightarrow{PD}=\frac{S_A}{S_B+S_C}\overrightarrow{AP} \qquad ②$$

联立得 $\frac{S_A}{S_B+S_C}\overrightarrow{AP}=\frac{S_B}{S_B+S_C}\overrightarrow{PB}+\frac{S_C}{S_B+S_C}\cdot\overrightarrow{PC}$，所以 $S_A\cdot\overrightarrow{PA}+S_B\cdot\overrightarrow{PB}+S_C\cdot\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$.

证明 2　如图 2 所示，设 $\overrightarrow{PA}=|\overrightarrow{PA}|\mathbf{e}_1$，$\overrightarrow{PB}=|\overrightarrow{PB}|\mathbf{e}_2$，$\overrightarrow{PC}=|\overrightarrow{PC}|\mathbf{e}_3$，$\angle BPC=\alpha$，$\angle CPA=\beta$，$\angle APB=\gamma$，则有

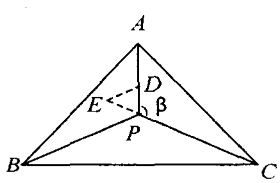

图 2

$$S_A=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PB}|\cdot|\overrightarrow{PC}|\sin\alpha,$$

$$S_B=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PC}|\cdot|\overrightarrow{PA}|\sin\beta,$$

$$S_C=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{PB}|\sin\gamma.$$

所以

$$S_A\cdot\overrightarrow{PA}+S_B\cdot\overrightarrow{PB}+S_C\cdot\overrightarrow{PC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{PB}|\cdot|\overrightarrow{PC}|\cdot(\mathbf{e}_1\sin\alpha+\mathbf{e}_2\sin\beta+\mathbf{e}_3\sin\gamma).$$

原题等价于 $\mathbf{e}_1\sin\alpha+\mathbf{e}_2\sin\beta+\mathbf{e}_3\sin\gamma=\mathbf{0}$，其中单位向量的方向如图 3 所示.

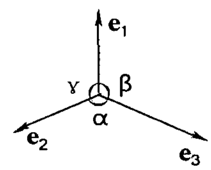

图 3

如图 2 所示，在 PA 上取一点 D，作 $DE//PB$ 交 CP 延长线于点 E，则 $\angle DEP$、$\angle EPD$、$\angle PDE$ 分别是 α、β、γ 的补角，在 $\triangle DEP$ 中，由正弦定理得 $\frac{|\overrightarrow{PD}|}{\sin\alpha}=\frac{|\overrightarrow{DE}|}{\sin\beta}=\frac{|\overrightarrow{EP}|}{\sin\gamma}$，因此 $|\overrightarrow{PD}|=k\sin\alpha$，$|\overrightarrow{DE}|=k\sin\beta$，$|\overrightarrow{EP}|=k\sin\gamma$，所以 $\overrightarrow{PD}=\mathbf{e}_1k\sin\alpha$，$\overrightarrow{DE}=\mathbf{e}_2k\sin\beta$，$\overrightarrow{EP}=\mathbf{e}_3k\sin\gamma$.

由于三个矢量首尾顺次衔接构成闭合三角形，则 $\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EP}=\mathbf{0}$，所以 $\mathbf{e}_1\sin\alpha+\mathbf{e}_2\sin\beta+\mathbf{e}_3\sin\gamma=\mathbf{0}$.

这是三个共点共面单位向量遵循的普遍规律，即在同一平面内的三个共点单位向量的加权和为零，其中每个单位向量的权系数为另外两个单位向量夹角的正弦.

故 $S_A\cdot\overrightarrow{PA}+S_B\cdot\overrightarrow{PB}+S_C\cdot\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$，即三角形内共点向量的线性加权和为零，权系数分别为向量所对的三角形面积.

对于三角形内的重心、内心、外心或垂心，关系式仍然成立，即三角形内共心向量的线性加权和为零.

结论 2　对于 $\triangle ABC$ 平面内的任一点 P，若

点 P 在 $\triangle ABC$ 的外部，并且在 $\angle BAC$ 的内部或其对顶角的内部所在区域时，则有 $-S_{\triangle PBC}\cdot\overrightarrow{PA}+S_{\triangle PAC}\cdot\overrightarrow{PB}+S_{\triangle PAB}\cdot\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$.

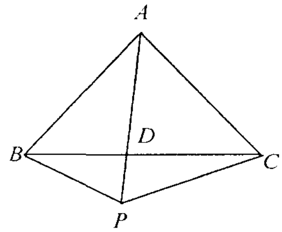

图 4

证明　如图 4 所示，可知 $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle PAC}}=\dfrac{S_1}{S_2}$，所以 $\overrightarrow{BD}=\dfrac{S_1}{S_2}\overrightarrow{DC}$.

利用向量的定比分点公式得

$$\overrightarrow{PD}=\frac{S_2}{S_1+S_2}\overrightarrow{PB}+\frac{S_1}{S_1+S_2}\overrightarrow{PC}\qquad ①$$

又 $\dfrac{PD}{PA}=\dfrac{S_{\triangle PDB}}{S_{\triangle PAB}}=\dfrac{S_{\triangle PDC}}{S_{\triangle PAC}}$，由合比定理可知 $\dfrac{PD}{PA}=\dfrac{S_{\triangle PDB}+S_{\triangle PDC}}{S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PAC}}=\dfrac{S_3}{S_1+S_2}$，即

$$\overrightarrow{PD}=\frac{S_3}{S_1+S_2}\overrightarrow{PA}\qquad ②$$

由 ①、② 两式得 $\dfrac{S_3}{S_1+S_2}\overrightarrow{PA}=\dfrac{S_2}{S_1+S_2}\overrightarrow{PB}+\dfrac{S_1}{S_1+S_2}\overrightarrow{PC}$，所以 $-S_{\triangle PBC}\cdot\overrightarrow{PA}+S_{\triangle PAC}\cdot\overrightarrow{PB}+S_{\triangle PAB}\cdot\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$.

结论 3　对于 $\triangle ABC$ 内的任一点 P，若 $\lambda_1\overrightarrow{PA}+\lambda_2\overrightarrow{PB}+\lambda_3\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$，则 $\triangle PBC$、$\triangle PCA$、$\triangle PAB$ 的面积之比为 $\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3$.

即若三角形内共点向量的线性加权和为零，则各向量所对的三角形面积之比等于权系数之比.

证明　如图 5 所示，作 $\overrightarrow{PA'}=\lambda_1\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{PB'}=\lambda_2\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{PC'}=\lambda_3\overrightarrow{PC}$，可知，$\overrightarrow{PA'}+\overrightarrow{PB'}+\overrightarrow{PC'}=\mathbf{0}$，因此 P 是 $\triangle A'B'C'$ 的重心，那么重心分别与顶点组成的三个三角形的面积相等.

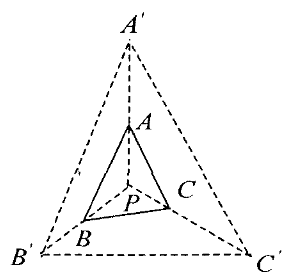

图 5

由三角形面积公式 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C$ 可知，

$$\frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle PB'C'}}=\frac{1}{\lambda_2\lambda_3},\frac{S_{\triangle PCA}}{S_{\triangle PC'A'}}=\frac{1}{\lambda_1\lambda_3},\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle PA'B'}}=\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}.$$

由于 $S_{\triangle PA'B'}=S_{\triangle PB'C'}=S_{\triangle PC'A'}$，所以 $S_{\triangle PBC}:S_{\triangle PCA}:S_{\triangle PAB}=\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3$.

结论 4　对于 $\triangle ABC$ 所在平面内不在三角形边上的任一点 P，若 $\lambda_1\overrightarrow{PA}+\lambda_2\overrightarrow{PB}+\lambda_3\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$，则 $\triangle PBC$、$\triangle PCA$、$\triangle PAB$ 的面积之比为 $|\lambda_1|:|\lambda_2|:|\lambda_3|$.

即若三角形平面内共点向量的线性加权和为零，则各向量所对应的三角形面积之比等于权系数的绝对值之比. 各向量所对应的三角形是指另外两个向量所在的三角形.

证明　如图 6 所示，在三角形外有一点 P，与三个顶点在同一平面内，由于共点向量 $\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{PC}$ 都大致朝上，则向量和 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$ 不可能为零，向量加权和 $S_A\cdot\overrightarrow{PA}+S_B\cdot\overrightarrow{PB}+S_C\cdot\overrightarrow{PC}$ 也不可能为零向量，因为不存在反向相消. 或者说，如果把三个向量视为共点力，作用点为 P，则合力不可能为零.

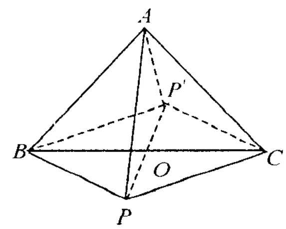

图 6

为使向量的加权和为零，权系数应存在负值，观察三个向量分布可知，向量 $\overrightarrow{PA}$ 的权系数应为负值，即 $-S_{\triangle PBC}\cdot\overrightarrow{PA}+S_{\triangle PCA}\cdot\overrightarrow{PB}+S_{\triangle PAB}\cdot\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$，亦即

$$S_{\triangle PBC}\cdot\overrightarrow{PA}-S_{\triangle PCA}\cdot\overrightarrow{PB}-S_{\triangle PAB}\cdot\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}\ ①$$

可利用三角形内共点向量的线性加权和为零的结论来证明. 需在三角形内找一点 P'，作平行四边形 $P'BPC$，两条对角线的交点为 O，如图 6 所示. 可知

$$S_{\triangle P'BC}\cdot\overrightarrow{P'A}+S_{\triangle P'CA}\cdot\overrightarrow{P'B}+S_{\triangle P'AB}\cdot\overrightarrow{P'C}=\mathbf{0}\qquad ②$$

由于 $\overrightarrow{P'A}=\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PP'}$，$\overrightarrow{P'B}=\overrightarrow{CP}$，$\overrightarrow{P'C}=\overrightarrow{BP}$，$S_{\triangle P'BC}=S_{\triangle PBC}$，可得

$$S_{\triangle PBC}\cdot(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PP'})+S_{\triangle P'CA}\cdot\overrightarrow{CP}+S_{\triangle P'AB}\cdot\overrightarrow{BP}=\mathbf{0},$$

即 $S_{\triangle PBC}\cdot\overrightarrow{PA}-S_{\triangle PBC}\overrightarrow{PP'}-S_{\triangle P'CA}\cdot\overrightarrow{PC}-S_{\triangle P'AB}\cdot\overrightarrow{PB}=\mathbf{0}$.

由平行四边形定则可知 $\overrightarrow{PP'}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PB}$，代入并整理得

$$S_{\triangle PBC}\cdot\overrightarrow{PA}-(S_{\triangle PBC}+S_{\triangle P'AB})\overrightarrow{PB}-(S_{\triangle PBC}+S_{\triangle P'CA})\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}\qquad ③$$

只要证明 ③ 式与 ① 式对应项的系数相等即可.

首先证明 $S_{\triangle PBC}+S_{\triangle P'CA}=S_{\triangle PAB}$.

由于 $S_{\triangle PBC}=S_{\triangle CPP'}$，故只需证 $S_{\triangle P'PC}+S_{\triangle P'CA}=S_{\triangle PAB}$. 即需证明四边形 $ACPP'$ 与 $\triangle ABP$ 二者的面积相等，如图 7 阴影部分所示.

如图 8 所示，作辅助线 AO，可知 $\triangle AOP$ 与 $\triangle AOP'$ 的面积相等；由于 AO 是 $\triangle ABC$ 的中线，PO 是 $\triangle PBC$ 的中线，因此四边形 $AOPB$ 与四边形 $AOPC$ 的面积相等. 由此可知四边形与三角形的面积之差相等，即 $\triangle APB$ 的面积与四边形 $AP'PC$ 的面积相等.

同理可证 $S_{\triangle PBC}+S_{\triangle P'AB}=S_{\triangle PCA}$.

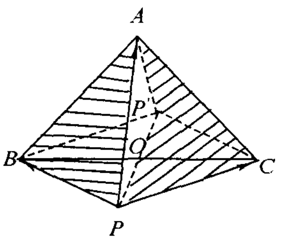

图 7

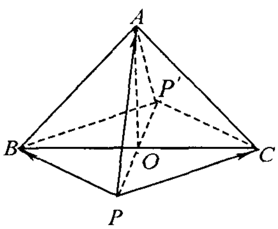

图 8

所以 $S_{\triangle PBC}\cdot\overrightarrow{PA}-S_{\triangle PCA}\cdot\overrightarrow{PB}-S_{\triangle PAB}\cdot\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$.

由此可知结论 4 成立.

在共点向量加权和为零的方程中究竟哪个向量的权系数为负值，取决于共点向量的起点在三角形所在平面上的位置.

对于三角形的内心，满足的向量关系式中的各系数均为正值，而对于三角形的旁心或钝角三角形的外心和垂心，满足的向量关系式中的各系数含有负值.

在钝角 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle B$ 为钝角，则外心 O 满足 $S_{\triangle OBC}\cdot\overrightarrow{OA}-S_{\triangle OCA}\cdot\overrightarrow{OB}+S_{\triangle OAB}\cdot\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$.

对于钝角三角形，若 $\angle B$ 为钝角，则垂心 H 满足 $S_{\triangle OBC}\cdot\overrightarrow{HA}-S_{\triangle OCA}\cdot\overrightarrow{HB}+S_{\triangle OAB}\cdot\overrightarrow{HC}=\mathbf{0}$.

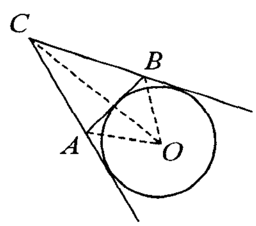

图 9

对于 $\triangle ABC$ 的旁心 O，必在三角形之外，如图 9 所示，若旁心 O 所对的内角为 $\angle C$，则有

$$S_{\triangle OBC}\cdot\overrightarrow{OA}+S_{\triangle OCA}\cdot\overrightarrow{OB}-S_{\triangle OAB}\cdot\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}.$$

即 $\sin A\cdot\overrightarrow{OA}+\sin B\cdot\overrightarrow{OB}-\sin C\cdot\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$.

总之，对于 $\triangle ABC$ 之外的任一点 P(在 $\triangle ABC$ 平面内)，若 $\lambda_1\overrightarrow{PA}+\lambda_2\overrightarrow{PB}+\lambda_3\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$，则权系数存在负值，那么 $\triangle PBC$、$\triangle PCA$、$\triangle PAB$ 的面积之比不是 $\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3$，而是 $|\lambda_1|:|\lambda_2|:|\lambda_3|$.

所以原三角形的面积与新三角形的面积之比为 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle PAC}}=\left|\frac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}{\lambda_3}\right|$.

若 $\triangle ABC$ 内一点 P 满足 $\lambda_1\overrightarrow{PA}+\lambda_2\overrightarrow{PB}+\lambda_3\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$，则点 P 的位置可由权系数唯一确定. 如果矢量方程中的三个系数都为正数，则点 P 在三角形之内；如果方程中有一个系数为零，则点 P 在对应顶点的对边上；如果方程中有一个系数为负数，则点 P 在三角形之外.

例题 已知 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面上一点，满足 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=3\overrightarrow{AB}$，求 $\triangle ABP$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比.

解 利用 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}$ 将 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=3\overrightarrow{AB}$ 变形为 $2\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$.

根据结论 3，由 $2\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$ 可知 $\triangle PBC$、$\triangle PCA$、$\triangle PAB$ 的面积之比为

$$|\lambda_1|:|\lambda_2|:|\lambda_3|=2:1:1.$$

故 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle PAB}}=\left|\frac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}{\lambda_3}\right|=\left|\frac{2-1+1}{1}\right|=2:1$. 即 $\triangle ABP$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比为 $1:2$.

如果得出 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle PAB}}=\frac{|\lambda_1|+|\lambda_2|+|\lambda_3|}{|\lambda_3|}=\frac{2+1+1}{1}=4:1$，则是错误的.

那么 $\triangle ABC$ 与 $\triangle PAC$ 的面积之比为多少呢？

可直接利用公式得 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle PAC}}=\left|\frac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}{\lambda_2}\right|=\left|\frac{2-1+1}{-1}\right|=2:1$.

参考文献

[1] 张留杰，童嘉森. 巧用面积探究一组优美性质. 高中数理化(上半月)，2013(9)：5.

[2] 张圣官，杨存程. 一道向量题，横跨数理天地. 数理天地，2002(4)：43.

[3] 叶秋平. 一道赛题的引申、证明与推广. 数理天地，2007(1)：22.

[4] 杨华，江明鑫. 杠杆原理使三角形“四心”统一. 数理天地，2011(5)：5.

[5] 陈啸. 从一道竞赛题的解法谈起. 数理天地，2010(4)：47.

[6] 吴艳梅. 类似于三角形重心的一类向量问题. 数理天地，2014(7)：5.

(收稿日期：2014－09－02)