篇名：

千年無解——幾何三大難題

作者：

陳岱君。國立彰化女中。一年十五班
楊子欣。國立彰化女中。一年十五班
溫梓丞。國立彰化女中。一年十五班

指導老師：

莊孟綉。國立彰化女中

千年無解——幾何三大難題

壹●前言

在數學發展史上，許多大大小小、各式各樣的問題曾經困擾著不同時代的數學家，但是「人定」終究是會「勝天」，無論多怪異、多艱深、多難解的數學題目，總是有解出的一天。不過，數學家們發現，有三個幾何題目似乎怎麼也解不出來——這便是數學界中赫赫有名的「幾何三大難題」，分別是「三等分角」、「化圓爲方」、「立方倍積」。

在這篇小論文中，我們將就此三大難題的內容、作圖以及爲什麼這三大難題是「無解」進行討論。

貳●正文

一、幾何三大難題之起源與傳說

位於歐洲南部的希臘，是著名的歐洲古國，幾何學的故鄉。這裡的古人提出的三大幾何難題，在科學史上留下了濃濃的一筆。這延續了兩千多年的世界性難題，也許是提出幾何三大難題的古希臘人所不曾預料到的。

01.三等分任意角：由求作多邊形一類的問題引起的，也是人們廣泛研究角的等分問題的結果。例如60°角，它的1/3是20°,如果用尺規可以作出，那麼正18邊形、正9邊形也都可以作出來了。

02.化圓爲方：這是基於人們以多邊形的任意逼近圓的認識。任意凸多邊形可分解爲若干個三角形，所以凸多邊形化爲正方形是可能的;既然圓可以由凸多邊形任意逼近，那麼想到用直尺和圓規來化圓爲方也是很正常的。

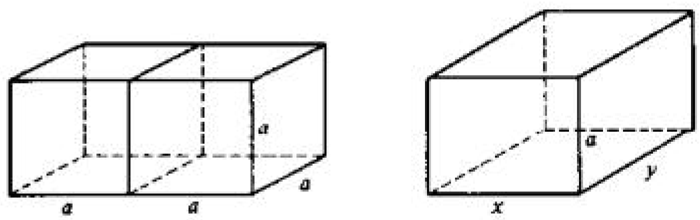
03.立方倍積：這個問題應該是起源於建築的需要。埃拉托塞尼記述了兩個神話故事:一個是鼠疫蔓延提洛島，一個先知者說已得到神的諭示，必須將立方形的阿波羅祭壇的體積加倍,瘟疫方能停息。建築師很爲難，不知怎樣才能使體積加倍，於是去請教哲學家柏拉圖。柏拉圖對他們說:神的真正意圖不在於神壇的加倍，而是想使希臘人爲忽視幾何學而感到羞愧；另一個故事說古代一位悲劇詩人描述克利特王彌諾斯爲格勞科斯修墳，他嫌造的太小，命令說:必須將體積加倍，但要保持立方體的形狀。這兩個傳說都表明倍立方問題起源於建築的需要。不過，還有一種非神話說法是：古希臘數學家看到利用尺規作圖很容易作一正方形，使其面積是已知正方形面積的兩倍，從而就進一步提出了倍立方問題。（註一）

二、探討

01.為什麼幾何三大難題「無解」？

A. 立方倍積

將一個邊長為a的正立方體體積加倍，即是要作出一新的正立方體之邊長x，滿足$X^3=2a^3$。這個問題被希波克拉提斯歸結為作出兩線段長a與2a的兩個連續比例中項。也就是說，要做出兩線段x，y滿足$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$，x即為所要求的新正立方體的邊長。希波克拉提斯如何想出這個倍立方問題的兩個比例中項解法，並沒有詳細的記載。據推測，他可能是這樣想的：將兩個邊長為a的正立方體放在一起，成為一個立方體長寬高分別為2a, a, a，體積為$2a^3$；想向將這個立體拉整一下，使其成為高維持為a，長寬分別為x，y的立方體，因為體積要維持一樣，所以 $xy=2a^2$ 從中可發現a/x=y/2a；再將立方體拉整成長為x，寬與高亦為x的立方體。同樣，體積要維持一樣，所以 $x^2=ay$，或$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}$，故$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$。



希波克拉提斯的發現並沒有解決倍立方的問題，只是將問題轉換成另一形式而已。但是，如何作出兩個比例中項x與y 呢? Menaechmus引入新的曲線，即圓錐曲線來解決這個問題:

將連比例式拆成兩個等式:$\frac{a}{x}=\frac{y}{2a}$ & $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}$，由此可得方程式 $x^2=ay$ 及 $y^2=2ax$。因為a已知，所以兩個拋物線的頂點、對稱軸能決定出，即兩拋物線的交點可作出，即x與y可作出。

『圓錐曲線』當然不能用尺規作圖作出，要證明倍立方問題的不可能，也只要用到上述的三次方程次理論即可。設原立方體的邊長為1，要作出的立方體邊長為x，則要滿足 $x^3=2$，這個方程式沒有有理根，當然就沒有可尺規作圖的x了。

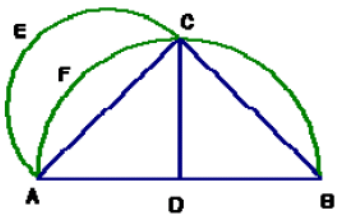
B. 化圓為方

根據第五世紀時的Simplicius引述Alexander Aphrodisiensis的話，認為有兩個新月形可以歸於希波克拉提斯。第一個新月形如圖，AB、AC為內接於圓AB的正方形的兩邊，弧AEC為以AC為直徑的半圓，Alexander證明：新月形ACE=ACD

因為AC＝BC，又$AB^2=AC^2+BC^2$，所以， $AB^2=2AC^2$

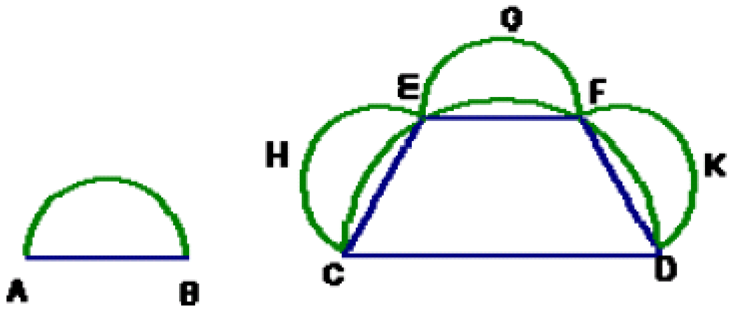
又$\frac{半圓ABC}{半圓ACB}=\frac{AC^2}{AB^2}=\frac{1}{2}$，所以半圓AEC＝ $\frac{1}{4}$圓ADCF，

同時減去弓形ACF，所以新月形ACE＝ACD。



第二個新月形如圖，$\overline{AB}$是半圓的直徑，$\overline{CD}=2\overline{AB}$為一半圓的直徑，$\overline{CE}.\overline{EF}.\overline{FD}$

為正六邊形的邊，且CHE、EGF、FKD分別為直徑$\overline{CE}.\overline{EF}.\overline{FD}$上的半圓。

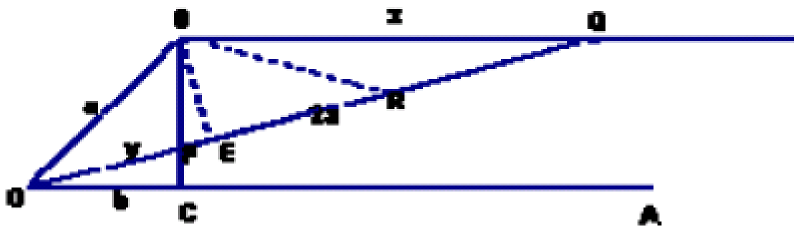


Alexander證明：
新月形CHE＋新月形EGF＋新月形FKD＋半圓AB＝梯形CEFD。
因為梯形CEFD＋三個以AB為直徑的半圓＝以CD為直徑的半圓＋三個新月形，又CD＝2AB，所以，以CD為直徑的半圓＝4（以AB為直徑的半圓），相消後， 梯形CEFD＝半圓AB＋三個新月形（CHE、EGF、FKD）。接下來Alexander說，因為一個新月形已經證明等於一個正方形，所以從可以正方形化的梯形中，減去等於三個新月形的正方形，剩下的圓亦可正方形化。這兩個新月形平方化的證明過程中，錯誤是相當明顯的。第一個新月形是一個特殊化的新月形，在圓內接正方形的邊上，只能說這樣的新月形可以平方化；而第二個新月形，卻是在圓內接正六邊形的邊上；根據史學家Ivor Thomas的說法，希波克拉提斯不太可能會犯這樣一個明顯的錯誤，所以，我們只能對Alexander的說法存疑。

作一正方形使其面積等於一已知圓的這個問題，其實牽涉到π與尺規作圖的可能性。1882年德國數學家林德曼 (F. Lindemann, 1852~1939) 在『代數數』與『超越數』的基礎下，證明π為超越數，因而不可能利用尺規作圖作出此數，同時，得證『化圓為方』是不可能的。

C. 三等分角

尺規作圖的不可能性的證明，要等到三次方程式的相關理論完成後才能證明，同時，這也能證明了倍立方問題的不可能。在這證明過程中，數學家利用到二個理論：1. 一個三次方程式若無有理根，則無『可尺規作圖根』。2. 一次因式檢查法。藉由尼可門笛司解決方法，如下圖，因為$\Delta PBQ \sim \Delta PCO \sim \Delta BEQ$，所以$\dfrac{\overline{BQ}}{\overline{PQ}}=\dfrac{\overline{CO}}{\overline{PO}}=\dfrac{\overline{EQ}}{\overline{BQ}}$，而因為$\Delta QRB$為等邊三角形，$\overline{BO}=\overline{BR}$，所以，E為$\overline{OR}$的中點，即$\overline{ER}=\dfrac{1}{2}\overline{OR}=\dfrac{y+a}{2}$，且$\overline{EQ}=\overline{ER}+\overline{RQ}=\dfrac{y+a}{2}+a=\dfrac{y+3a}{2}$，故$\dfrac{x}{2a}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{y+3a}{2}$，得到一三次方程式$x^3-3x-2b=0$。若三次方程式有可作出的根$x$，則$\overline{BQ}$可作圖，Q點決定後，三等分問題即可解決。所以，由上述可知，可否三等分和b的值有關，有相當多的角是可以三等分的，例如，$b=0$，即角為90°時可三等分，但是，$b=\dfrac{1}{2}$，即角為60°時，方程式為$x^3-3x-1=0$，並沒有有理根，所以，所有的根皆是不可尺規作圖的，即60°無法尺規作圖三等分，也就是說，尺規作圖三等分任意角(除了直角等幾個特別角之外)是不可能的。（註 二）



02.使用非尺規作圖的方式

在尺規作圖的限制之下（只能使用直尺及圓規，且必須在有限步驟內完成），幾何三大難題是無法被解決的

在尺規作圖的限制之下（只能使用直尺及圓規，且必須在有限步驟內完成），幾何三大難題是無法被解決的，而以下為數學家們使用非尺規座圖的解題方法。

A.立方倍積

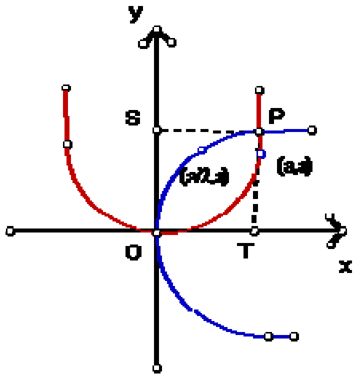
a.西元前350年希臘數學家門內馬斯(Menaechmus)的作法

已知：線段 a

求作：線段x,y，使得a：x＝x：y＝y：2a

作法： 1. 作拋物線 $y=\frac{1}{a}x^2$ [其中頂點(0,0)，對稱軸y軸，過(a,a)]

2. 作拋物線 $x=\frac{1}{2a}y^2$ [其中頂點(0,0)，對稱軸x軸，過 $(\frac{a}{2},a)$]，二拋物線交於P



3. 過P作 $\overline{PT}\perp x$軸於T, $\overline{PS}\perp y$軸於S，則 $\overline{PS}=x, \overline{PT}=y$ 即爲所求

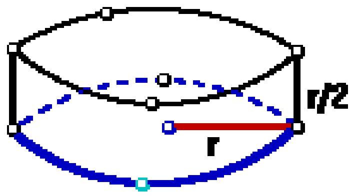
B.化圓爲方

a.達文西(Da Vinci 1452-1519)提供了一個簡易而巧妙的作法]

已知：半徑爲 r 的圓

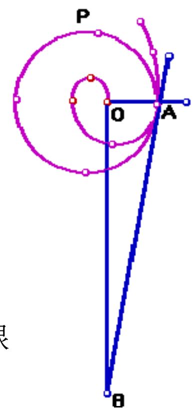
求作：面積爲 πr^2 之正方形

作法：1. 作一圓柱，其底半徑爲 r，高爲 $\frac{r}{2}$



2. 將此圓柱在平面上滾動一周，得到一矩形。
3. 作出此矩形之長與寬之正幾何平均數 a
4. 以 a 爲一邊，作正方形，即爲所求。

（就是將圓柱上下剪開成一矩形，再化矩形爲正方形）



b. 阿基米德的螺線 (Archimedes’ spiral) 極坐標式：$r=a\theta, \theta\geq 0$

可以將一圓的圓周展開拉平成一直線，它能化圓爲方

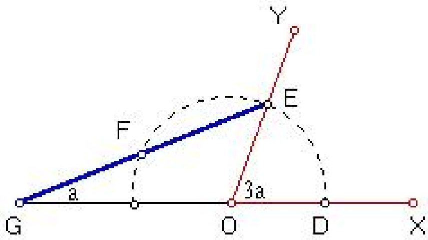
作法：1. 一條從O出發的射線，繞O均勻地旋轉(如鐘錶的時針一樣)

2. 有一點P從O開始沿此線均勻移動，則P點的軌跡即爲螺線
3. 設此曲線從O到A爲螺線的第一圈 (即對應於 $0\leq\theta\leq 2\pi$)，過A作 $\overline{AB}$ 切於螺線，且 $\overline{OB}\perp\overline{OA}$,則 $\overline{OB}$ 等於以 $\overline{OA}$ 爲半徑的圓周長

事實上，方圓問題其實並未完結，到了20世紀，割補術------把甲圖分割爲若干塊，再拼補爲乙圖，已成爲化圓爲方的另一途徑；同時，集合論亦使方圓問題別開生面，促使這個古老問題，至今仍以新的形式不斷地被深入研究著。

C.三等分角

a.西元前200年希臘數學家阿基米(Archimedes)
的作法



已知：∠XOY

求作：三等分∠XOY

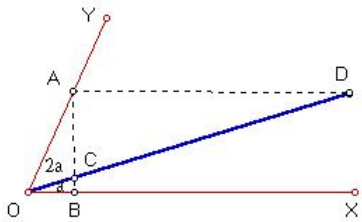
作法：1. 以O爲圓心，適當長r爲半徑畫圓，

交$\overline{OY}, \overline{OX}$於E,D

2. 在直尺上取兩點F,G,使$\overline{FG} = r$

3. 移動直尺，使通過E，並使F落在圓周上，G落在直線OX上，則∠EGX即爲所求

b. 西元前300年希臘數學家帕普斯(Pappus)的作法



已知：∠XOY

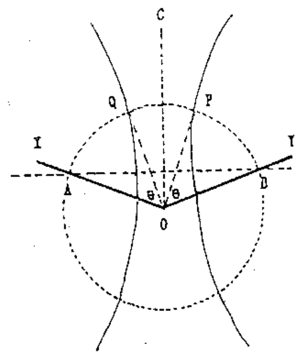
求作：三等分∠XOY

作法：1. 在$\overline{OY}$上取適當長$\overline{OA}$(設$\overline{OA}$= a)

2. 過A作$\overline{AD} // \overline{OX}, \overline{AB} \perp \overline{OX}$於B

3. 在$\overline{AD}, \overline{AB}$間置入一長爲2a的$\overline{CD}$， 並使線CD通過O，則∠COB即爲所求

c.Pappus利用雙曲線來解決三等分角的問題



已知：∠XOY

求作：:三等分∠XOY

作法： 1. 以O爲圓心作一單位圓,交$\overline{OX}, \overline{OY}$於A,B,

並作∠AOB平分線$\overline{OC}$

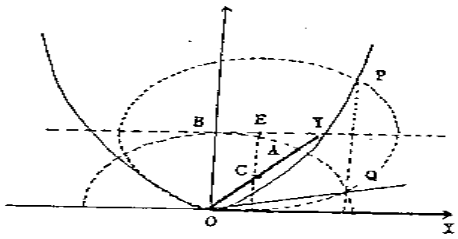
2. 使點P移動,而$\overline{PB}$恒爲P與$\overline{OC}$的距離的2倍, 則可

作$\overline{OC}$出以爲準線,B爲焦點的雙曲線的一支

3. 以$\overline{OC}$爲軸,可得對稱於$\overline{OC}$的雙曲線的另一支圖形

4. 設雙曲線與單位圓的交點P,Q,作$\overline{OP},\overline{OQ}$即爲所求

d.解析幾何創使人笛卡爾於1637的解法



已知：∠XOY

求作：三等分∠XOY

作法： 1. 坐標平面上，作拋物線Y＝X^2

2. 以0爲圓心作單位爲2的圓，交$\overline{OY}$於A，交Y軸於B

3. 作$\overline{OA}$並取其中點C

4. 過B，C各作Y軸與X軸的垂線，交於E

5. 以E爲圓心，$\overline{OE}$爲半徑畫弧，交拋物線於P

6. 過P作X軸垂線交單位圓於Q,作$\overline{OQ}$即爲所求

e.西元前460年希比亞斯爲了三等分角及方圓問題,而發明了割圓曲線（Quadratrix），可以三等分任意銳角（進而三等分任意角)

已知：∠XOY

求作：三等分∠XOY

作法：1. 以0爲圓心作單位圓,交$\overline{OY},\overline{OX}$於A，B，作$\overline{OC}\perp\overline{OX}$交圓於C

2. D點依定速沿$\overline{OC}$,由O到C,同時E點亦定速沿圓弧,由B到C自D作$\overline{OB}$ 平行線, 交$\overline{OE}$於P (P點的軌跡即爲割圓曲線)

3. 設割圓曲線交$\overline{OA}$於F,過F作$\overline{FG}\perp\overline{OC}$於G

4. $\overline{OC}$上取$\overline{OD}=\frac{1}{3}\overline{OG}$,過D作 $\overline{OB}$平行線，交曲線於P

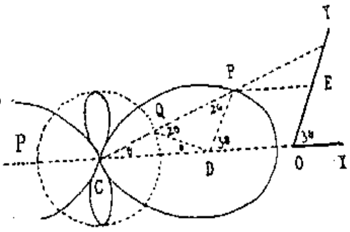
5. 作 $\overline{OP}$即爲所求

f.1699年西瓦（Ceva）所作的三等分角線.稱爲旋輪線，原理是倍角

已知：∠XOY

求作：三等分∠XOY

作法： 1. 以定線上的C點為圓心,作一單位圓，在一繞C旋轉的線上，定出合於$\overline{OP}=\overline{QD}=\overline{DP}=1$的P點，Q在單位圓上.則P之軌跡即是



2. 將$\overline{OX}$與$\overline{CD}$CD共線，在$\overline{OY}$上截取$\overline{OE}$ ＝ 1

3. 過E作$\overline{OX}$平行線,交旋輪線於P,作$\overline{CP}$即為所求

（註三）

參●結論

「幾何三大難題」於1837年及1882年由萬徹爾（Wantzel)和林德曼（F.Lindemann）證明其尺規作圖為不可能。從西元前一直到十九世紀，數學家們用盡各種方法試圖去解決這些棘手的問題，雖然到最後是徒勞無功，不過在這不斷嘗試的過程中，卻也開啓了數學的新頁——拋物線、橢圓、雙曲線這三種可以由圓錐體，用平面截出來的曲線，不容置疑地在曲線中是最有趣又最有用的；方程式的理論受三大難題的探索而大有發展，更間接地影響到近代的群論。由此可見，一個懸而未解的問題未必是個災難，相反的，在世人努力研究它的同時，或許會發展出更進一步、對人類更有價值的學問，那麼，就算結局是這個問題根本解不出來，但它背後所帶來的發展也可說是值回票價了。

肆●引註資料

註一、Poncelet。http://poncelet.math.nthu.edu.tw/disk5/enc/3problems.html。（檢索日期2009/2/5）。

註二、三大作圖題。台北市西松高中蘇惠玉。http://museum.math.ntnu.edu.tw/chi_gui_zuo_tu/2_20081013.pdf。（檢索日期2009/2/7）。

註三、 基隆市銘傳國中。http://mail.mcjh.kl.edu.tw/~lo/。（檢索日期2009/2/9）。