第13卷 第2期 1983年6月
中国科学技术大学学报
JOURNAL OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
Vol.13, No.2 June, 1983

Hadamard 不等式的推广

沈忠民 荣用武

（数学系79级）

在线性代数中，我们遇到过很多关于行列式的不等式，其中为大家所熟知的有 Hadamard 不等式．即

若令 $x_i=(x_{i1},\cdots x_{in})\in C^n$，

则

$$\left|\det\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right|\leqslant\prod_{i=1}^{n}\|x_i\|,$$

其中 $\|x_i\|=\sqrt{x_i\bar{x}_i'}=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|x_{ij}|^2}$ 为向量 x_i 的长度．

本文首先把一般方阵的行列式值表达成乘积形式，然后由这个等式对行列式值作了比较精确的估计，从而推广了 Hadamard 不等式．为了叙述方便，先引进一些记号．

定义 1． 设 H 是 n 维内积空间，$x_1,\cdots,x_m\in H$，记 $G(x_1,\cdots,x_m)=\det((x_i,x_j))_{m\times m}$；又设 $S\subset H$ 为子空间，$x\in H$，记 $d(x,S)=\inf\limits_{y\in S}\|x-y\|$．

利用线性代数知识，我们容易证得，当 $x_1,\cdots,x_m$，线性无关时，$G(x_1,\cdots x_m)\neq0$．

引理1． 设 H 是 n 维内积空间，$x_1,\cdots,x_m$，及 $x\in H$，S 是 $x_1,\cdots,x_m$ 张成的线性子空间，若 $x_1,\cdots,x_m$ 线性无关，则

$$d^2(x,S)=\frac{G(x_1,\cdots,x_m,x)}{G(x_1,\cdots,x_m)}.$$

这是已知结果[1]，证明从略．

定义 2． 设 H 是 n 维内积空间，S 是它的子空间，$0\neq x\in H$，定义 $\langle x,S\rangle$ 是满足

$$\sin\langle x,S\rangle=\frac{d(x,S)}{\|x\|}$$

1981年12月30日收到

的在$[0,\pi/2]$中的角．特别当S是由y生成的子空间时，简记$\langle x,S\rangle=\langle x,y\rangle$．

在定义 2 中，当$y\neq 0$时，由引理 1，

$$\sin^2\langle x,y\rangle=\frac{d^2(x,S)}{\|x\|^2}=\frac{G(x,y)}{G(y)\|x\|^2}=1-\frac{|(x,y)|^2}{\|x\|^2\|y\|^2}$$

因此，$\langle x,y\rangle$即为通常定义的两向量x与y的夹角．

引理 2．设$T\subset S$，都是n维内积空间H的子空间，$\forall 0\neq x\in H$，有$\sin(x,S)\leqslant\sin(x,T)$．

证．$\because$

$$d(x,S)=\inf_{y\in S}\|x-y\|$$

$$\leqslant\inf_{y\in T}\|x-y\|=d(x,T)．$$

$$\therefore\qquad \sin(x,S)=\frac{d(x,S)}{\|x\|}\leqslant\frac{d(x,T)}{\|x\|}=\sin(x,T)．$$

由引理 2，我们显然有：$\forall y\in S$，$y\neq 0$，则$\sin\langle x,S\rangle\leqslant\sin\langle x,y\rangle$．

定理 1．设A是n阶复方阵，行向量$x_1,\cdots,x_n$线性无关，则

$|\det A|=\|x_1\|\cdots\|x_n\|\sin\langle x_2,S_1\rangle\cdots\sin\langle x_n,S_{n-1}\rangle$ 其中S_i是由$x_1,\cdots,x_i$生成的线性子空间．

证．$$|\det A|^2=\det A\bar{A}'=G(x_1,\cdots,x_n)=G(x_1)\frac{G(x_1,x_2)}{G(x_1)}\cdots\frac{G(x_1,\cdots,x_n)}{G(x_1,\cdots,x_{n-1})}$$

$$=\|x_1\|^2d^2(x_2,S_1)\cdots d^2(x_n,S_{n-1})$$

$$=\|x_1\|^2\cdots\|x_n\|^2\sin^2\langle x_2,S_1\rangle\cdots\sin^2\langle x_n,S_{n-1}\rangle$$

定理 2．设$x_i=(x_{i1},\cdots,x_{in})\in\mathbf{C}^n$，线性无关，则

$$\left|\det\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right|\leqslant\prod_{j=1}^{n}\|x_j\|\prod_{j=2}^{n}\sin\langle x_j,x_{i_j}\rangle\ (i_j<j)$$

证．$\because x_{i_j}\in S_{j-1}$

$\therefore$由引理 2，$\sin^2\langle x_j,S_{j-1}\rangle\leqslant\sin^2\langle x_j,x_{i_j}\rangle$代入定理 1 的不等式中，即得定理 2．

不等式$\left|\det\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right|\leqslant\prod_{j=1}^{n}\|x_j\|\prod_{j=2}^{n}\sin\langle x_1,x_j\rangle$

是定理 2 的一种特殊情形，显然，对任意$1\leqslant i\leqslant n$

$$\left|\det\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right|\leqslant\prod_{j=1}^{n}\|x_j\|\prod_{j\neq i}\sin\langle x_i,x_j\rangle,$$

若进一步将$i=1,\cdots,n$的n个不等式乘起来，则有形式上更对称的不等式：

$$\left|\det\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right|\leqslant\prod_{j=1}^{n}\|x_j\|\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}\sin^{\frac{2}{n}}\langle x_i,x_j\rangle$$

总之，以上定理可以认为是Hadamard不等式的推广．因为任意两个非零复向量x，$y\in\mathbf{C}^n$，只要$(x,y)\neq 0$，就有

$$\sin^2(x,y)=1-\frac{|(x,y)|^2}{\|x\|^2\|y\|^2}<1$$

参 考 文 献

[1] 关肇直，泛函分析讲义，高等教育出版社，1959.
[2] 许以超，代数学引论，上海科技出版社，

A Generalization of Hadamard's Determinatal Inequality

Shen Zhongmin Rong Yongwu

(*Class of* 1979, *Department of Mathmatics*)

PEO型精密超声声速测试系统通过鉴定

PEO方法(Pulse-echo-overlapmechod)是测量超声波在介质中的传播时间和速度的重要方法之一．由于它具有用途广泛、测量精度高的优点，因而受到采用．但由于它属于几台仪器组成的实验室装置，以致操作较为不便，精度也难保证．为开展物理声学研究工作，并为开设专业实验课提供条件，我校无线电电子学系声学教研室及无线电厂，于去年三月研制成功PEO型精密超声声速测试系统，从而克服了原有装置的弱点．该测试系统由主机——PEO—1型超声声速测试仪——和专用的PZS—1型频率综合仪组成．主机将PEO方法所需的的电子线路组装在一个机箱内，这样，不但操作方便，而且由于减少了不必要的连线，而使仪器工作稳定可靠．经过一年试用，证明该测试系统性能稳定，使用方便．

三月二十五日至二十六日，在我校召开了该测试系统的技术鉴定会．参加鉴定的有校内外十六个单位的二十名代表．鉴定会上，我校的陆玲珍同志和张国柱同志，分别作了PEO—1型精密超声声速测试仪和PZS—1型频率综合仪的研制报告，南京大学物理系的王业宁教授介紹了她在固体物理研究工作中，利用PEO测试方法所取得的成果．与会代表看了测试系统的演示，测试组的同对主机的主要技术指标和对声程为6.002cm的石英晶体z轴的超声纵波传志播时间进行了测量，并测了样品的声时温度系数．经过讨论，与会代表一致认为："该系统设计合理，已达到预期设计指标，测时精度达10^{-5}数量级，系统分辨率小于1ns，该系统达到美国1976年同类PEO方法测试装置水平"．"该系统对固体物理、超声延迟等材料的研究、生产，具有实用价值，处于国内领先地位"．"PEO型精密超声声速测试系统的研制成功，对声学为国民经济服务作出了有益的貢献，建议组织生产、推广使用"．为扩大使用范围，鉴定会建议我校扩大PEO主机工作频率范围和实现频率连续可调．

（无线电电子学系供稿）