张角定理 斯特瓦尔特定理 托勒密定理[1][2][3]

【问题提出】张角定理，朴实无华

如图 1-1，点 P 为 $\triangle ABC$ 边 BC 上的任一点，如图标记 α, β 两角，则 $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{AP} = \dfrac{\sin\alpha}{AC} + \dfrac{\sin\beta}{AB}$.

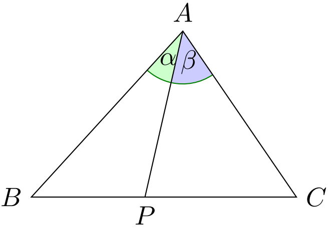

图 1-1

【问题解决】三角形面积公式

需证

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{AP} = \frac{\sin\alpha}{AC} + \frac{\sin\beta}{AB}$$

$$\begin{aligned} \iff\ & AC \cdot AB \sin(\alpha+\beta) = AB \cdot AP \sin\alpha \\ & + AP \cdot AC \sin\beta \end{aligned} \tag{01}$$

$$\iff 2S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ABP} + 2S_{\triangle APC}$$

这显然成立. □

[1] 不知张角定理的英文名称会是什么

[2] 纯几何证明托勒密定理难度较大

[3] 文编译 LaTeX.

BY IC

【问题提出】Stewart 定理，初识是个鬼

如图 1-2，点 P 为 $\triangle ABC$ 边 BC 上的任一点，则

$$BC \cdot AP^2 = BP \cdot AC^2 + PC \cdot AB^2 - BP \cdot PC \cdot BC.$$

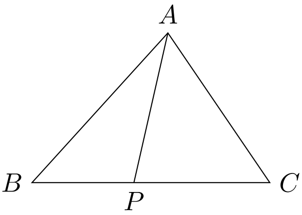

图 1-2

【问题解决】余弦定理

分别在 $\triangle ABP$ 和 $\triangle APC$ 中，由余弦定理可得

$$AB^2 = AP^2 + BP^2 - 2AP \cdot BP \cos APB \tag{02}$$

$$AC^2 = AP^2 + PC^2 + 2AP \cdot PC \cos APB \tag{03}$$

为了消去 $\cos APB$，则 $(02) \cdot PC + (03) \cdot BP$，并将右边整理有

$$BP \cdot AC^2 + PC \cdot AB^2 = BC \cdot AP^2 + BP \cdot PC \cdot BC,$$

将 $BP \cdot PC \cdot BC$ 移项即是. □

记 $BP/BC = \lambda$，则有

$$AP^2 = \lambda \cdot AC^2 + (1-\lambda) \cdot AB^2 - \lambda(1-\lambda) \cdot BC^2.$$

【问题提出】Ptolemy 定理

圆内接凸四边形两对对边乘积的和等于两条对角线的乘积，即，四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，则 $AB\cdot CD+BC\cdot DA=AC\cdot BD$.

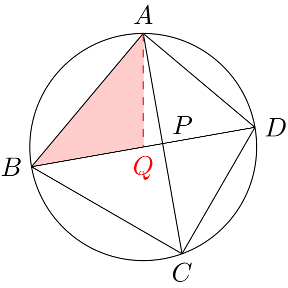

图 2

【问题解决】经典构造相似三角形

在 BD 上取点 Q，使 $\angle BAQ=\angle CAD$，则

$$\triangle ABQ\sim\triangle ACD\Rightarrow AB\cdot CD=AC\cdot BQ.$$

又 $\angle AQD=\pi-\angle AQB=\pi-\angle ADC=\angle ABC$，从而

$$\triangle AQD\sim\triangle ABC\Rightarrow BC\cdot DA=AC\cdot QD.$$

于是 $AB\cdot CD+BC\cdot DA=AC\cdot(BQ+QD)=AC\cdot BD$. $\square$

其实，我们在 2018 年 7 月 23 日《三角函数在平几中的应用示例》中作为引理用三角证过一次.

介绍完仨主角后，我们将说明张角定理，斯特瓦尔特定理，托勒密定理这三者其实是**等价**的，尽管形式各异.

我们就倒回去吧，即张角定理与 Ptolemy 定理，张角定理与 Stewart 定理，Stewart 定理与 Ptolemy 定理一路证过去.

延续 2018 年 7 月 23 日的三角法.

【**简单引理**】三角恒等式

若 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi$，则

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)=\sin\alpha\sin\gamma+\sin\beta\sin\delta. \tag{04}$$

证：由积化和差公式并注意 $\alpha+2\beta+\gamma=\pi+\beta-\delta$

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)=\sin\alpha\sin\gamma+\sin\beta\sin\delta$$

$$\begin{gathered}\iff\ -\cos(\beta-\delta)-\cos(\alpha-\gamma)=\\ \cos(\alpha+\gamma)-\cos(\alpha-\gamma)\\ +\cos(\beta+\delta)-\cos(\beta-\delta)\end{gathered}$$

$$\iff\ \cos(\alpha+\gamma)+\cos(\beta+\delta)=0$$

而 $\alpha+\gamma+\beta+\delta=\pi$，知上式成立. $\square$

注意这四个角的任意性，随后，我们所取四角都会有几何意义，从而将张角定理与 Ptolemy 定理“连接”起来.

【**问题提出**】张角定理与 Ptolemy 定理的等价性

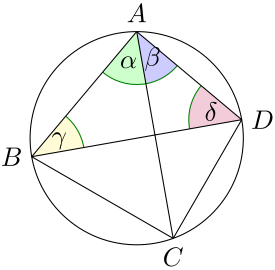

图 2-1

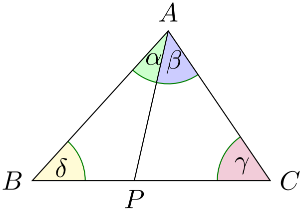

图 1-3

先将 Ptolemy 定理三角化，如图 2-1 标记角，由正弦定理有

$$BD \cdot AC = BC \cdot AD + CD \cdot AB$$

$$\iff \sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma) = \sin\alpha\sin\gamma + \sin\beta\sin\delta$$

就是(04). $\square$

再看张角定理，如图 1-2 标记角.

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{AP} = \frac{\sin\alpha}{AC} + \frac{\sin\beta}{AB}$$

$$\iff \sin(\alpha+\beta) = \frac{AP}{AC}\sin\alpha + \frac{AP}{AB}\sin\beta$$

$$\iff \sin(\alpha+\beta) = \frac{\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}\sin\alpha + \frac{\sin\delta}{\sin(\beta+\gamma)}\sin\beta$$

$$\iff \sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma) = \sin\alpha\sin\gamma + \sin\beta\sin\delta$$

也是(04). $\square$

有点投机取巧，这便是说“连接”起来之意了.

将(01)左边用正弦加法公式展开，如图 1-1

$$AC \cdot AB \sin(\alpha+\beta) = AB \cdot AP \sin\alpha$$
$$+AP \cdot AC \sin\beta$$

$$\iff AC \cdot AB \sin\alpha\cos\beta + AC \cdot AB \cos\alpha\sin\beta =$$

$$AB \cdot AP \sin\alpha + AP \cdot AC \sin\beta$$

$$\because \frac{AB\sin\alpha}{AC\sin\beta} = \frac{BP}{PC} = \frac{k\cdot BP}{k\cdot PC}$$

$$\iff AC \cdot BP \cos\beta + PC \cdot AB \cos\alpha = BC \cdot AP$$ ④

$$\iff AC \cdot BP \cdot \frac{AP^2+AC^2-PC^2}{2AP\cdot AC}$$
$$+PC \cdot AB \cdot \frac{AP^2+AB^2-BP^2}{2AP\cdot AB} = BC \cdot AP$$

$$\iff BP\cdot(AP^2+AC^2-PC^2)$$
$$+PC(AP^2+AB^2-BP^2) = 2BC\cdot AP^2$$

$$\iff BP\cdot AC^2 + PC\cdot AB^2$$
$$-BP\cdot PC\cdot BC = BC\cdot AP^2$$

一算到底. □

这也恰巧说了形式上差异大.

④太像正弦定理的代换了，此处

【**问题提出**】Stewart 定理与 Ptolemy 定理

我们从 Stewart 定理出发，由繁到简证得 Ptolemy 定理.

在图 2 中记 AC 与 BD 的交点为 P，在 $\triangle ABD$ 中，则

$$BD\cdot AP^2+BP\cdot PD\cdot BD=BP\cdot AD^2+PD\cdot AB^2$$

$$\because BP\cdot PD=AP\cdot PC$$

$$\begin{aligned}\iff\ & BD\cdot AP^2+AP\cdot PC\cdot BD\\ &=BP\cdot AD^2+PD\cdot AB^2\end{aligned}$$

$$\because \triangle BPC\sim\triangle APD\Rightarrow BP\cdot AD=AP\cdot BC$$

$$\because \triangle DPC\sim\triangle APB\Rightarrow PD\cdot AB=AP\cdot DC$$

$$\begin{aligned}\iff\ & BD\cdot AP^2+AP\cdot PC\cdot BD\\ &=AP\cdot BC\cdot AD+AP\cdot DC\cdot AB\end{aligned}$$

$$\iff BD(AP+PC)=BC\cdot AD+DC\cdot AB$$

$$\iff BD\cdot AC=BC\cdot AD+DC\cdot AB$$

此间证明不需要任何辅助线呐！[⑤] □

奇怪，竟然想到了秦九韶公式与海伦公式之间的联系，穿越了……具体应用很广，下次喽.

[⑤]这便是 Stewart 定理的优点