梁浩——王志强老师的极值点偏移问题的部分证明

已知函数 $f(x)=x-ae^{x}+1$， $f(x_1)=f(x_2)=0$ $(x_1<x_2)$，求证：

（1）$e^{x_1}+e^{x_2}>\dfrac{2}{a}$

（2）$e^{x_1}+e^{x_2}>\dfrac{2-\ln a}{a}$

（3）$e^{x_1}+e^{x_2}<\dfrac{1}{a}(2-\dfrac{4}{3}\ln a)$

（4）$x_1+x_2>-\ln a$

（5）$x_1+x_2>\ln\dfrac{3}{a(a+2)}$

（6）$x_1+x_2<-\dfrac{4}{3}\ln a$

（7）$e^{-x_1}+e^{-x_2}>2$

（8）$e^{-x_1}+e^{-x_2}<3-a$

（9）$e^{-x_1}+e^{-x_2}<e+(2-e)a$

（10）$e^{-x_1}+e^{-x_2}>\dfrac{2}{3}(4-a)$

（11）$e^{-0.5x_1}+e^{-0.5x_2}>\sqrt{\dfrac{2}{3}a+\dfrac{10}{3}}$

（12）$x_1+x_2+x_1x_2<0$

（13）$x_1x_2>2\ln a$

（14）$x_1x_2<\ln a$

（15）$x_1x_2<\ln\dfrac{a(a+2)}{3}$

（16）$e^{-x_1}+e^{-x_2}+e^{-0.5(x_1+x_2)}<3$

（17）$e^{x_1}+e^{x_2}+e^{0.5(x_1+x_2)}>\dfrac{3-\ln a}{a}$

（18）$(x_1+1)(x_2+1)(x_1+x_2+2)<2$

题源：北京丰台王志强 **编辑：山东青岛李宝臻 安徽阜阳梁浩**

（1），（2），（4）的证明

证明：不难证明$a\in(0,1)$，则（2）成立可推出（1）成立，易知（2）$\Leftrightarrow$（4），因此只需证明（2）成立，则（1），（2），（4）三个结论成立. 下证（2）

证明：令$\begin{cases}t_1=e^{x_1}\\t_2=e^{x_2}\end{cases}$，则原问题可转化为，求证$g(t)=\dfrac{\ln t+1}{t}=a$的两个解$t_1,t_2$满足，$t_1+t_2>\dfrac{2-\ln a}{a}$. 又

$$\begin{aligned}t_1+t_2>\frac{2-\ln a}{a}&\Leftrightarrow a(t_1+t_2)>2-\ln a\\&\Leftrightarrow \ln t_1+\ln t_2>-\ln a\\&\Leftrightarrow t_2>\frac{1}{at_1}\\&\Leftrightarrow g(\frac{1}{at_1})>g(t_2)=a\\&\Leftrightarrow -\ln\frac{1}{t_1}<e^{1-\frac{1}{t_1}}-1\\&\Leftrightarrow \ln t+e^{1-t}>1\ (t\in(1,e))\end{aligned}$$

令 $h(t)=\ln t+e^{1-t}-1$,$t\in(1,e)$ ， 则 $h'(t)=\dfrac{e^t-et}{te^t}>0$ ， 因 此 $h(t)>0$ ， 即 $\ln t+e^{1-t}>1\ (t\in(1,e))$，故结论成立.

下面我们给出（4）的构造“二次型函数”的证明

证明：令$g(x)=x^2+(\ln(x+1)-x)x+2(\ln(x+1)-x)$， $x>-1$，则

$g'(x)=\ln(x+1)-\dfrac{x}{x+1}>0$，故$g(x)$在定义域内单调递增， $g(x_1)<g(x_2)$，即

${x_1}^2+\ln a\cdot x_1+2\ln a<{x_2}^2+\ln a\cdot x_2+2\ln a$，整理得， $x_1+x_2>-\ln a$.

（3），（6）的证明

证明：易知（3）$\Leftrightarrow$（6），下证（6）

令$x_2-x_1=t$，则由$x_1+1=ae^{x_1}$， $x_2+1=ae^{x_2}$得， $x_1=\dfrac{t+1-e^t}{e^t-1}$，（6）式等价于

$2\dfrac{t+1-e^t}{e^t-1}+t<-\dfrac{4}{3}[\ln(x_1+1)-x_1]$，又等价于$2\dfrac{t+1-e^t}{e^t-1}+3t<4\ln\dfrac{e^t-1}{t}$，

令$g(t)=4\ln\dfrac{e^t-1}{t}-2\dfrac{t+1-e^t}{e^t-1}-3t,\ t>0$，则

$g'(t)=\dfrac{(t-4)e^{2t}+(2t^2+2t+8)e^t-t-4}{(e^t-1)^2}>0$，又$g(0)=0$，因此$g(t)>0$，

故（6）成立.

（7）的证明

证明：根据上面的换元知，即证明，$\dfrac{1}{t_1}+\dfrac{1}{t_2}>2$，其中$t_1,t_2$是$g(t)=\dfrac{\ln t+1}{t}=a$的两个解，进一步换元，令$u_2=\dfrac{1}{t_1}$，$u_1=\dfrac{1}{t_2}$，则原问题转化为，

求证：$\varphi(u)=u(1-\ln u)=a$的两个解u_1,u_2满足，$u_1+u_2>2$.

令$k(u)=\varphi(u)-[1-\dfrac{(u-1)^2}{2}]$，$u>0$，则$k'(u)=u-1-\ln u\ge 0$又$k(1)=0$因此，

$u\in(0,1)$时，$\varphi(u)<[1-\dfrac{(u-1)^2}{2}]$；$u\in(1,+\infty)$时，$\varphi(u)>[1-\dfrac{(u-1)^2}{2}]$，

设$1-\dfrac{(u-1)^2}{2}=a$的两解为u_3,u_4，$u_3<u_4$，则$u_3<u_2$，$u_4<u_1$，故$u_1+u_2>u_3+u_4=2$.

（8）的证明

证明：根据（7）的换元知，即证明，$u_1+u_2<3-a$.

令$g(u)=u^2-(3-u(1-\ln u))u+u(1-\ln u)$，则

$g'(u)=3u-3-2u\ln u-\ln u$，$g''(u)=1-2\ln u-\dfrac{1}{u}$，$g'''(u)=\dfrac{1-2u}{u^2}$，因此$g(u)$先增后减，又$g(1)=0$，$\therefore g(u_1)>0>g(u_2)$，整理得$u_1{}^2-u_2{}^2>(3-a)(u_1-u_2)$，故

$u_1+u_2<3-a$，即$e^{-x_1}+e^{-x_2}<3-a$.

这里顺便说一下，我们可以通过构造函数，证明：$u_1+u_2<e$，即$e^{-x_1}+e^{-x_2}<e$.

证明：令$g(u)=\dfrac{1-\ln u}{(e-u)},u\in(0,e)$，则$g'(u)=\dfrac{2-\ln u-\frac{e}{u}}{(e-u)^2}<0$，因此$g(u_1)>g(u_2)$，

整理得，$\dfrac{u_1(1-\ln u_1)}{u_1(e-u_1)}>\dfrac{u_2(1-\ln u_2)}{u_2(e-u_2)}$，故$u_1(e-u_1)<u_2(e-u_2)$，整理得：$u_1+u_2<e$.

（9）的证明

证明：根据（7）的换元知，即证明，$u_1+u_2<e+(2-e)a$.

$u_1+u_2<e+(2-e)a \Leftrightarrow u_2<e+(2-e)u_1(1-\ln u_1)-u_1 \triangleq h(u_1)$，由 $\varphi(u)=u(1-\ln u)$ 得单调性知，即证：$\varphi(h(u_1))<a$，其中 $u_1\in(0,1)$

即：$h(u_1)-h(u_1)\ln h(u_1)<u_1(1-\ln u_1)$，$u_1\in(0,1)$

令 $\phi(u)=h(u)-h(u)\ln h(u)-u(1-\ln u)$，$u\in(0,1)$，则

$\phi'(u)=\ln u-h'(u)\ln h(u)$，

$$\phi''(u)=\frac{h(u)-(e-2)h(u)\ln h(u)-u(h'(u))^2}{uh(u)}\triangleq\frac{m(u)}{uh(u)}$$

$m'(u)=(2-e)h'(u)[\ln uh(u)+\frac{3e-8}{e-2}]$，不难证明 $uh(u)$ 在 $u\in(0,1)$ 内单调递增，且值域为 $(0,1)$．故存在 $u_0\in(0,1)$，使得：

$u\in(0,u_0)$，$m'(u)<0$；$u\in(0,u_0)$，$m'(u)<0$．又 $m(0)>0$，$m(1)=0$，则

存在 $x_0\in(0,1)$，使得：

$u\in(0,x_0)$，$m(u)>0$；$u\in(x_0,1)$，$m(u)<0$．即 $\phi'(u)$ 在 $u\in(0,x_0)$ 内单调递增；

$\phi'(u)$ 在 $u\in(x_0,1)$ 内单调递减. 又 $\phi'(1)=0$，则存在 $\alpha\in(0,1)$，$u\in(0,\alpha)$，$\phi'(u)<0$；

$u\in(\alpha,1)$，$\phi'(u)>0$. 又 $\phi(0)=0$，$\phi(1)=0$，故 $\phi(u)<0$.

（10）的证明

证明：根据（7）的换元知，即证明，$u_1+u_2>\frac{2}{3}(4-a)$.

$u_1+u_2>\frac{2}{3}(4-a)\Leftrightarrow u_2>\frac{2}{3}(4-u_1(1-\ln u_1))-u_1 \triangleq h(u_1)$，由 $\varphi(u)=u(1-\ln u)$ 得单调性知，即证：$\varphi(h(u_1))>a$，其中 $u_1\in(0,1)$

即：$h(u_1)-h(u_1)\ln h(u_1)>u_1(1-\ln u_1)$，$u_1\in(0,1)$

令 $\phi(u)=h(u)-h(u)\ln h(u)-u(1-\ln u)$，$u\in(0,1)$，则

$\phi'(u)=\ln u-h'(u)\ln h(u)$，

$$\phi''(u)=\frac{h(u)-\frac{2}{3}h(u)\ln h(u)-u(h'(u))^2}{uh(u)}\triangleq\frac{m(u)}{uh(u)}$$

$m'(u)=-\dfrac{2h'(u)}{3}\ln uh(u)$，不难证明 $uh(u)$ 在 $u\in(0,1)$ 内单调递增，且值域为 $(0,1)$.

$\therefore m'(u)<0$，又 $m(1)=0$，则 $m(u)>0$，即 $\phi''(u)>0$，又 $\phi'(1)=0$，则 $\phi'(u)<0$，

又 $\phi(1)=0$，故 $\phi(u)>0$.

（12）的证明

证明：由题意知，$x_1+1=ae^{x_1}$，$x_2+1=ae^{x_2}$，因此，$(x_1+1)(x_2+1)=a^2e^{x_1+x_2}$，故

$x_1+x_2+x_1x_2<0\Leftrightarrow x_1+x_2<-2\ln a$，

令 $h(x)=x^2+2\ln a\cdot x+2\ln a\ (x>-1)$，其中 $a=\dfrac{x+1}{e^x}$ 则

$h'(x)=-2x+2\ln(x+1)\le 0$，因此 $h(x)$ 在定义域内单调递减，故 $h(x_1)>h(x_2)$，整理得

$x_1+x_2<-2\ln a$，故结论成立.

（13）的证明

证明：由题意知，$x_1x_2=a^2e^{x_1+x_2}-(x_1+x_2)-1$，由（4），（6）知 $x_1+x_2\in(-\ln a,-\frac{4}{3}\ln a)$

利用 $g(x)=a^2e^x-x-1$，在 $x\in(-\ln a,-\frac{4}{3}\ln a)$ 单调递减知：

$x_1x_2>a^{\frac{2}{3}}+\frac{4}{3}\ln a-1$. 下证：$a^{\frac{2}{3}}+\frac{4}{3}\ln a-1>2\ln a$，事实上

$$\begin{aligned}a^{\frac{2}{3}}+\frac{4}{3}\ln a-1-2\ln a&=a^{\frac{2}{3}}-1-\frac{2}{3}\ln a\\&=a^{\frac{2}{3}}-1-\ln a^{\frac{2}{3}}>0\end{aligned}$$

故结论成立.

（14）的证明

证明：由（12）知，$x_1x_2<-(x_1+x_2)$，又由（4）知 $x_1+x_2>-\ln a$，故 $x_1x_2<\ln a$.

（15）的证明

证明：由题意知，$x_1x_2=a^2e^{x_1+x_2}-(x_1+x_2)-1$，由（4），（6）知 $x_1+x_2\in(-\ln a,-\frac{4}{3}\ln a)$

利用 $g(x)=a^2e^x-x-1$，在 $x\in(-\ln a,-\frac{4}{3}\ln a)$ 单调递减知：

$$x_1x_2<a+\ln a-1$$

下证：$a+\ln a-1<\ln\frac{a(a+2)}{3}\Leftrightarrow a-1-\ln\frac{a-2}{3}<0,(a\in(0,1))$

令 $h(a)=a-1-\ln\frac{a-2}{3},(a\in(0,1))$，$h'(a)=1-\frac{1}{a+2}>0$，

又 $h(1)=0$，∴ $h(a)<0$，即 $a-1<\ln\frac{a+2}{3}$，故结论成立.

事实上，利用（5），（12）立刻推出（15）.

（18）的证明

证明：令 $\begin{cases}x_1+1=t_1\\x_2+2=t_2\end{cases}$，原命题转化为：$t=ae^{t-1}$ 的两根为 t_1,t_2，求证：$t_1t_2(t_1+t_2)<2$.

$$\begin{cases}t_1=ae^{t_1-1}\\t_2=ar^{t_2-1}\end{cases}\Rightarrow\ln\frac{t_2}{t_1}=t_2-t_1，\text{令}\frac{t_2}{t_1}=t，\text{则}t_1=\frac{\ln t}{t-1}(t>1)$$

$$t_1t_2(t_1+t_2)<2\Leftrightarrow\frac{t(t+1)\ln^3t}{(t-1)^3}<2\Leftrightarrow\ln^3t<\frac{2(t-1)^3}{(t+1)t}\Leftrightarrow\ln t<\frac{\sqrt[3]{2}(t-1)}{[(t+1)t]^{\frac{1}{3}}}$$

令 $g(t)=\frac{\sqrt[3]{2}(t-1)}{[t(t+1)]^{\frac{1}{3}}}-\ln t$，$(t>1)$，

则 $g'(t)=\frac{\sqrt[3]{2}(t^2+4t+1)}{3(t^2+t)^{\frac{4}{3}}}-\frac{1}{t}=\frac{\sqrt[3]{2}(t^2+4t+1)t-3(t^2+t)^{\frac{4}{3}}}{3(t^2+t)^{\frac{4}{3}}t}$

$$\begin{aligned}\because\ 2(t^2+4t+1)^3t^3-27(t^2+t)^4&=t^3[2(t^2+4t+1)^3-27(t+1)^4t]\\&=t^3(t-1)^4(2t^2+5t+2)>0\end{aligned}$$

∴ $g'(t)>0$，又 $g(1)=0,\therefore g(t)>0$

（5），（11），（16），（17）的证明详见公众号——许康华竞赛优学——《郑小彬——王志强老师四个极值点偏移问题的简证》.