用 Schur 分拆方法证明不等式竞赛题

姚勇 (中国科学院成都计算机应用研究所,610041)
陈胜利 (福建省南安市五星中学,362341)

(本讲适合高中)

齐次对称不等式一直是数学竞赛的一个热点.这类题的难度都很大,证明的方法也是多种多样,很不好把握.本文向大家介绍一种方法——Schur 分拆方法.

这种方法是最近在对称不等式研究方面取得的新进展[1],由本文第二作者提出和发展的.因为该方法受到著名的 Schur 不等式的启发,故称为 Schur 分拆方法.由于这种方法原本是以计算机作为基本运算手段的,运算量颇大,是属于定理机器可读证明研究范围,因此,它并不适合介绍给竞赛选手在赛场上使用.然而,这一方法的优美和初等,使我们想要去改造它,这就形成了本文的原始写作动机.通过改造,这一方法将使竞赛选手甚至普通学生也可以轻易地掌握和运用.

1 基本理论

定理 1(Schur) 若 $x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$, α 为实数,则

$$\sum x^{\alpha}(x-y)(x-z)\geqslant 0, \quad ①$$

当且仅当 $x=y=z$ 或 $x=0, y=z$ 的置换时,式①等号成立.

式①称为 Schur 不等式.

符号 $\sum f(x, y, z)$ 表示轮换求和(下同).

证明: 由对称性可假定 $x\geqslant y\geqslant z$,令

$$x=t_1+t_2+t_3, y=t_2+t_3, z=t_3,$$

其中, t_1、t_2、t_3 是非负实数.

将其代入式①左端并整理得

$$(t_1+t_2+t_3)^{\alpha}t_1^2+[(t_1+t_2+t_3)^{\alpha}-(t_2+t_3)^{\alpha}+t_3^{\alpha}]t_2t_1+t_3^{\alpha}t_2^2.$$

注意到 $(t_1+t_2+t_3)^{\alpha}-(t_2+t_3)^{\alpha}+t_3^{\alpha}\geqslant 0$ 显然成立,故不等式①成立.

等号成立条件易得(略).

下面是 Schur 不等式的类似推广,它们是 Schur 分拆方法的基础,选自文[1].

定理 2 若 $x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0, k$ 为非负实数,则

(1) $\sum (yz)^{k}(x-y)(x-z)\geqslant 0$;

(2) $\sum x^{k}(y+z)(x-y)(x-z)\geqslant 0$;

(3) $\sum (yz)^{k}(y+z)(x-y)(x-z)\geqslant 0$.

证明: (1)将欲证不等式变形为

$$(xyz)^{k}\sum x^{-k}(x-y)(x-z)\geqslant 0.$$

由定理 1 可知上式成立.

(2)、(3)仿上可证.

2 三元齐三次对称不等式

定理 3 三元齐三次对称多项式 $f(x, y, z)$ 可以唯一的表示为

$$f(x, y, z)=ag_{3,1}+bg_{3,2}+cg_{3,3}, \quad ②$$

其中, $g_{3,1}=\sum x(x-y)(x-z)$,

$$g_{3,2}=\sum (y+z)(x-y)(x-z),$$

$$g_{3,3}=xyz,$$

并且当 x、y、$z\geqslant 0$ 时,

$$a、b、c\geqslant 0 \Leftrightarrow f(x, y, z)\geqslant 0.$$

证明此定理并不难,留给有兴趣的读者思考.

例 1 已知 x、y、z 是非负实数,且满足 $x+y+z=1$.证明:

收稿日期:2006-11-17 修回日期:2007-09-24

$$0\leqslant xy+yz+zx-2xyz\leqslant\frac{7}{27}.$$

(第25届IMO)

分析:由于原不等式并非齐次,故先齐次化,即变形为

$$0\leqslant(xy+yz+zx)(x+y+z)-2xyz$$
$$\leqslant\frac{7}{27}(x+y+z)^3.$$

令 $f(x,y,z)$
$$=(xy+yz+zx)(x+y+z)-2xyz$$
$$=ag_{3,1}+bg_{3,2}+cg_{3,3}.$$

为了快速计算出待定系数,只需注意

$a=f(1,0,0),b=\frac{f(1,1,0)}{2}$,

$c=f(1,1,1)$.

于是,有 $a=0,b=1,c=7$.

证明:注意到

$$(xy+yz+zx)-2xyz$$
$$=(xy+yz+zx)(x+y+z)-2xyz$$
$$=g_{3,2}+7g_{3,3}\geqslant0.$$

则$\frac{7}{27}-(xy+yz+zx)+2xyz$

$$=\frac{7}{27}(x+y+z)^3-(xy+yz+zx)\cdot(x+y+z)+2xyz$$
$$=\frac{7}{27}g_{3,1}+\frac{1}{27}g_{3,2}\geqslant0.$$

例2 设 $a、b、c$ 是正实数,且满足 $abc=1$.证明:

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leqslant1.$$

(第41届IMO)

证明:令 $a=\frac{x}{y},b=\frac{y}{z},c=\frac{z}{x}$.

于是,原不等式等价于

$$xyz-(x+z-y)(x+y-z)(y+z-x)\geqslant0. \quad ①$$

计算出

$f(1,0,0)=1,f(1,1,0)=0,f(1,1,1)=0$.

式①即 $g_{3,1}\geqslant0$.

因此,原不等式得证.

3 三元齐四次对称不等式

定理4 三元齐四次对称多项式 $f(x,y,z)$ 可以唯一的表示为

$$f(x,y,z)=ag_{4,1}+bg_{4,2}+cg_{4,3}+dg_{4,4},$$

其中,$g_{4,1}=\sum x^2(x-y)(x-z)$,

$$g_{4,2}=\sum x(y+z)(x-y)(x-z),$$
$$g_{4,3}=\sum yz(x-y)(x-z),$$
$$g_{4,4}=xyz(x+y+z),$$

并且当 $x、y、z\geqslant0$ 时,

$$a、b、c、d\geqslant0\Rightarrow f(x,y,z)\geqslant0.$$

先给出系数 $a、b、c、d$ 的简单确定方法:

$a=f(1,0,0),c=f(1,1,0)$,

$d=\frac{f(1,1,1)}{3},b=a+\frac{c-f(-1,0,1)}{4}$.

例3 设 $a、b、c$ 是正实数,且满足 $abc=1$.证明:

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}.$$

分析:直接去分母化为整式型不等式,将会遇到高次多项式而面临更大的困难.从已知 $abc=1$ 入手,看能不能先降低次数.

作代换 $a=\frac{1}{x},b=\frac{1}{y},c=\frac{1}{z}$,原不等式转化为

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geqslant\frac{3}{2}.$$

注意到 $x+y+z\geqslant3\sqrt[3]{xyz}=3$,故只要证

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geqslant\frac{1}{2}(x+y+z).$$

这等价于证明

$$g=x^2(x+z)(x+y)+y^2(y+x)(y+z)+z^2(z+x)(z+y)-\frac{1}{2}(x+y+z)(x+y)\cdot(y+z)(z+x)\geqslant0.$$

简单计算得

$g(1,0,0)=1,g(1,1,0)=2$,

$g(1,1,1)=0, g(-1,0,1)=0$.

由此将 g 分拆为

$$g=g_{4,1}+\frac{3}{2}g_{4,2}+2g_{4,3}\geqslant 0.$$

证明:略.

4 三元齐五次对称不等式

定理 5 三元齐五次对称多项式 $f(x,y,z)$ 可以唯一的表示为

$$f(x,y,z)=ag_{5,1}+bg_{5,2}+cg_{5,3}+dg_{5,4}+eg_{5,5},$$

其中,$g_{5,1}=\sum x^3(x-y)(x-z)$,

$$g_{5,2}=\sum x^2(y+z)(x-y)(x-z),$$

$$g_{5,3}=\sum yz(y+z)(x-y)(x-z),$$

$$g_{5,4}=xyz\sum(x-y)(x-z),$$

$$g_{5,5}=xyz(xy+yz+zx),$$

并且当 $x、y、z\geqslant 0$ 时,

$$a、b、c、d、e\geqslant 0\Rightarrow f(x,y,z)\geqslant 0.$$

下面是系数 $a、b、c、d、e$ 的简单确定方法:

$$a=f(1,0,0), c=\frac{f(1,1,0)}{2},$$

$$e=\frac{f(1,1,1)}{3}, b=\frac{f(1,\mathrm{i},0)}{2(1+\mathrm{i})}+\frac{c}{2},$$

$$d=\frac{f(-1,\mathrm{i},1)\mathrm{i}+8b+e-2a}{2}.$$

例 4 设正实数 $a、b、c$ 满足 $a+b+c=1$.证明:

$$10(a^3+b^3+c^3)-9(a^5+b^5+c^5)\geqslant 1.$$

(2005,中国西部数学奥林匹克)

证明:原不等式等价于(为了区别于系数字母,以下变量用 $x、y、z$)

$$\begin{aligned}&f(x,y,z)\\&=10(x^3+y^3+z^3)(x+y+z)^2-\\&\quad 9(x^5+y^5+z^5)-(x+y+z)^5\\&\geqslant 0.\end{aligned}$$

简单计算得

$f(1,0,0)=0, f(1,1,0)=30$,

$f(1,1,1)=0, f(1,\mathrm{i},0)=15(1+\mathrm{i})$,

$f(-1,\mathrm{i},1)=0$.

从而,$a=0, c=15, e=0, b=15, d=60$.

故 $f(x,y,z)=15g_{5,2}+15g_{5,3}+60g_{5,4}\geqslant 0$.

5 三元齐六次对称不等式

定理 6 三元齐六次对称多项式 $f(x,y,z)$ 可以唯一的表示为

$$\begin{aligned}&f(x,y,z)\\&=ag_{6,1}+bg_{6,2}+cg_{6,3}+dg_{6,4}+eg_{6,5}+\\&\quad mg_{6,6}+ng_{6,7},\end{aligned}$$

其中,$g_{6,1}=\sum x^4(x-y)(x-z)$,

$$g_{6,2}=\sum x^3(y+z)(x-y)(x-z),$$

$$g_{6,3}=(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2,$$

$$g_{6,4}=\sum(yz)^2(x-y)(x-z),$$

$$g_{6,5}=xyz\sum x(x-y)(x-z),$$

$$g_{6,6}=xyz\sum(y+z)(x-y)(x-z),$$

$$g_{6,7}=(xyz)^2,$$

并且当 $x、y、z\geqslant 0$ 时,

$$a、b、c、d、e、m、n\geqslant 0\Rightarrow f(x,y,z)\geqslant 0.$$

下面是系数 $a、b、c、d、e、m、n$ 的简单确定方法:

首先,计算 $f(1,0,0), f(1,1,0), f(1,1,1)$,得到 $a=f(1,0,0), d=f(1,1,0), n=f(1,1,1)$.

其次,计算 $f(0,-1,1), f(0,1,\mathrm{i})\mathrm{i}$,得方程组

$$\begin{cases}f(0,-1,1)=4a-4b+4c-d,\\f(0,1,\mathrm{i})\mathrm{i}=2a-2b-2c+d.\end{cases}$$

将 $a、d$ 代入方程组解得 $b、c$.

最后,计算 $f(-1,1,1), f(-1,1,\mathrm{i})$,得方程组

$$\begin{cases}f(-1,1,1)=4a-8b+4d+4e-8m+n,\\f(-1,1,\mathrm{i})=2a+16c-6d-6e+8m-n.\end{cases}$$

将 $a、b、c、d、n$ 代入方程组解得 $e、m$.

上面系数 $a、b、c、d、e、m、n$ 的确定方法,只涉及到一些简单的求值和解两个二元一次方程组,计算量并不太大.与前面次数小

于6的不等式相比,齐六次对称不等式在数学竞赛中出现最多,难度也最大.

例5 设 x、y、z 是正实数.证明:

$$(xy+yz+zx)\left[\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\right]\geqslant\frac{9}{4}.$$

(1996,伊朗数学奥林匹克)

证明:原不等式等价于

$$\begin{aligned}&f(x,y,z)\\&=4(xy+yz+zx)[(y+z)^2(z+x)^2+\\&\quad(z+x)^2(x+y)^2+(x+y)^2(y+z)^2]-\\&\quad 9(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2\\&\geqslant 0.\end{aligned}$$

首先,计算 $f(1,0,0)$,$f(1,1,0)$,$f(1,1,1)$,得到 $a=0,d=0,n=0$.

其次,计算 $f(0,-1,1)$,$f(0,1,\mathrm{i})\mathrm{i}$,得方程组

$$\begin{cases}-4=-4b+4c,\\-14=-2b-2c.\end{cases}$$

解得 $b=4,c=3$.

最后,计算 $f(-1,1,1)$,$f(-1,1,\mathrm{i})$,得方程组

$$\begin{cases}0=-8\times4+4e-8m,\\-16=16\times3-6e+8m.\end{cases}$$

解得 $e=16,m=4$.

故 $f(x,y,z)=4g_{6,2}+3g_{6,3}+16g_{6,5}+4g_{6,6}$

$\geqslant 0$.

因此,原不等式得证.

例6 设正实数 x、y、z 满足 $xyz\geqslant1$.证明:

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2}\geqslant 0.$$

(第46届IMO)

证明:注意到

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}\geqslant\frac{x^5-x^2xyz}{x^5+(y^2+z^2)xyz}$$

$$=\frac{x^4-x^2yz}{x^4+(y^2+z^2)yz}.$$

而 $$\frac{x^4-x^2yz}{x^4+(y^2+z^2)yz}=\frac{2(x^4-x^2yz)}{2[x^4+(y^2+z^2)yz]}$$

$$\geqslant\frac{2x^4-x^2(y^2+z^2)}{2x^4+(y^2+z^2)^2},$$

故欲证原不等式,只须证

$$\sum\frac{2x^4-x^2(y^2+z^2)}{2x^4+(y^2+z^2)^2}\geqslant 0. \qquad ①$$

作代换 $(x^2,y^2,z^2)\to(x,y,z)$.

于是,式① $\Leftrightarrow\sum\frac{2x^2-x(y+z)}{2x^2+(y+z)^2}\geqslant 0$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow f(x,y,z)\\&\quad=\sum\{[2x^2-x(y+z)]\cdot\\&\qquad[2y^2+(x+z)^2]\cdot\\&\qquad[2z^2+(x+y)^2]\}\\&\quad\geqslant 0.\end{aligned}$$

首先,计算 $f(1,0,0)$,$f(1,1,0)$,$f(1,1,1)$,得到 $a=2,d=24,n=0$.

其次,计算 $f(0,-1,1)$,$f(0,1,\mathrm{i})\mathrm{i}$,得方程组

$$\begin{cases}0=4\times2-4b+4c-24,\\8=2\times2-2b-2c+24.\end{cases}$$

解得 $b=3,c=7$.

最后,计算 $f(-1,1,1)$,$f(-1,1,\mathrm{i})$,得方程组

$$\begin{cases}64=80+4e-8m,\\-48=-28-6e+8m.\end{cases}$$

解得 $e=18,m=11$,

$$\begin{aligned}&故\ f(x,y,z)\\&=2g_{6,1}+3g_{6,2}+7g_{6,3}+24g_{6,4}+\\&\quad 18g_{6,5}+11g_{6,6}\\&\geqslant 0.\end{aligned}$$

因此,原不等式得证.

例7 设 m_a、m_b、m_c 是 $\triangle ABC$ 对应边上的中线长,r_a、r_b、r_c 是 $\triangle ABC$ 对应边上旁切圆的半径.证明:

$$\frac{r_ar_b}{m_am_b}+\frac{r_br_c}{m_bm_c}+\frac{r_cr_a}{m_cm_a}\geqslant 3.$$

证明:注意到熟知的公式

$2p=a+b+c$,

$$r_a=\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}},$$

$$m_a=\frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}.$$

则 $\frac{r_b r_c}{m_b m_c}=\frac{4p(p-a)}{\sqrt{(2a^2+2c^2-b^2)(2a^2+2b^2-c^2)}}$

$\geqslant\frac{8p(p-a)}{(2a^2+2c^2-b^2)+(2a^2+2b^2-c^2)}$

$=\frac{2[(b+c)^2-a^2]}{4a^2+b^2+c^2}.$

于是,只须证

$$\sum\frac{2[(b+c)^2-a^2]}{4a^2+b^2+c^2}\geqslant 3. \qquad ①$$

作代换 $(a,b,c)\to(y+z,z+x,x+y)$ $(x、y、z\in\mathbf{R}_+)$. 于是,

式①$\Leftrightarrow\sum\frac{2[(2x+y+z)^2-(y+z)^2]}{4(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2}\geqslant 3.$

接下来,通分去分母依次计算一些特殊值,解得系数(过程略)

$a=50,b=280,c=395,d=810,$

$e=1\,460,m=864,n=0.$

故 $50g_{6,1}+280g_{6,2}+395g_{6,3}+810g_{6,4}+1\,460g_{6,5}+864g_{6,6}\geqslant 0.$

例8 设正实数 $x、y、z$,满足

$x^2+y^2+z^2=1,g=x+y+z-xyz.$

求证:g 的最小值为1.

证明:因为 $x^2+y^2+z^2=1$,所以,

$g=x+y+z-xyz$

$\geqslant x+y+z-3xyz$

$\geqslant 3\sqrt[3]{xyz}-3xyz\geqslant 0.$

于是,$g\geqslant 1$ 等价于(齐次化)

$G(x,y,z)$

$=[(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)-xyz]^2-(x^2+y^2+z^2)^3$

$\geqslant 0.$

对 $G(x,y,z)$ 作分拆得到

$G(x,y,z)$

$=2g_{6,2}+2g_{6,3}+8g_{6,4}+8g_{6,5}+12g_{6,6}+37g_{6,7}$

$\geqslant 0.$

顺便指出,对六次以上的齐次对称不等式虽也有相应结论,但因计算量太大,不适合用本方法手算了.另外,当分拆出现负系数时,需要作相应的调整,这在竞赛题中是很少见的(习题5).这些都不再一一介绍了.

练习题

1.设 $a、b、c$ 和 S 分别是$\triangle ABC$ 的三边长和面积.证明:$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}S$.

(提示:令 $a=x+y,b=y+z,c=z+x$,转化为 $[(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2]^2$ $\geqslant 48(x+y+z)xyz$.)

2.设 $x、y、z、m、k$ 是正实数,且 $k\geqslant m$.证明:

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{m(xy+yz+zx)}+\frac{8xyz}{k(x+y)(y+z)(z+x)}\geqslant\frac{m+k}{mk}.$$

3.设 $x、y、z$ 是正实数.证明:

$$(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)\geqslant 3+\frac{2(x^3+y^3+z^3)}{xyz}.$$

4.设 $x、y、z$ 是非负实数.证明:

$$\frac{(y^2+z^2)(z^2+x^2)(x^2+y^2)}{8}\geqslant\frac{(xy+yz+zx)^3}{27}.$$

5.设 $x、y、z$ 是正实数,且满足 $x^2+y^2+z^2=1$.证明:

$$\frac{1}{1-xy}+\frac{1}{1-yz}+\frac{1}{1-zx}\leqslant\frac{9}{2}.$$

(提示:$3g_{6,1}-2g_{6,2}+7g_{6,3}+4g_{6,4}+9g_{6,5}-2g_{6,6}$

$=g_{6,1}+7g_{6,3}+2g_{6,4}+5g_{6,5}+$

$2\sum x^2(x-y)^2(x-z)^2+$

$2\sum yz(x-y)^2(x-z)^2\geqslant 0.$)

6.设 $x、y、z$ 是非负实数.证明:

$$\frac{3(x+y+z)^6}{64}\geqslant(x^2+xy+y^2)(y^2+yz+z^2)(z^2+zx+x^2)+\frac{459x^2y^2z^2}{64}.$$

参考文献:

[1] 陈胜利,黄方剑.三元对称形式的Schur分拆与不等式的机器证明[J].数学学报,2006,49(3):491~502.